TUYỂN TẬP 100 HỆ PHƯƠNG TRÌNH LTĐH NĂM HỌC 2014-2015



NHÓM GIÁO VIÊN THỰC HIỆN

1) *PHẠM VĂN QUÝ*
2) *NGUYỄN VIẾT THANH*
3) *DOÃN TIẾN DŨNG*

ĐƠN VỊ CÔNG TÁC: TRƯỜNG THPT HÙNG VƯƠNG, TX ĐỒNG XOÀI, TỈNH BÌNH PHƯỚC

Bài 1 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}=12 & (1)\\ x^3-8x-1=2\sqrt{y-2} & (2)\end{cases}$ (x, y ∈ R) ***(ĐH khối A – 2014)***

Giải

Điều kiện : $\begin{cases}2\le y\le 12\\ 12-x^2\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\le y\le 12\\ -2\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{3}\end{cases}$

Cách 1:

Đặt $a=\sqrt{12-y}, a\ge 0 \Rightarrow y=12-a^2$

PT (1) $\Leftrightarrow xa+\sqrt{(12-a^2)(12-x^2)}=12$

$\Leftrightarrow \sqrt{12^2-12x^2-12a^2+x^2a^2}=12-xa$

$\Leftrightarrow \begin{cases}xa\le 12\\ 12^2-12x^2-12a^2+x^2a^2=12^2-2.12.xa+x^2a^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}xa\le 12\\ 12x^2-2.12xa+12a^2=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}xa\le 12\\ (x-a)^2=0\end{cases}$

Ta có $(x-a)^2=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{12-y}$ (*)

Thế (*) vào (2) được : $(12-y)\sqrt{12-y}-8\sqrt{12-y}-1=2\sqrt{y-2}$

$\Leftrightarrow (4-y)\sqrt{12-y}=2\sqrt{y-2}+1$

$\Leftrightarrow \quad (3-y)\sqrt{12-y}+\sqrt{12-y}-3+2-2\sqrt{y-2}=0$

$\Leftrightarrow (3-y)\sqrt{12-y}+\dfrac{3-y}{\sqrt{12-y}+3}+\dfrac{2(3-y)}{1+\sqrt{y-2}}=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=3\\ \sqrt{12-y}+\dfrac{1}{\sqrt{12-y}+3}+\dfrac{2}{1+\sqrt{y-2}}=0\,(\text{vo nghiem})\end{array}\right.$

Vậy $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$

Cách 2:

Ta có $x\sqrt{12-y} + \sqrt{(12-x^2)y} \le \sqrt{\left(x^2+12-x^2\right)\left(12-y+y\right)} = 12$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{12-y^2}} = \dfrac{\sqrt{12-y}}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow x\sqrt{y} = \sqrt{(12-y)(12-x^2)}$ (3)

Khi đó (1) tương đương với (3)

(3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2y = 144 - 12x^2 - 12y + x^2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 12y = 144 - 12x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ y = 12 - x^2 \quad (4) \end{cases}$

Thế (4) vào (2) ta có

(2) $\Leftrightarrow x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{10-x^2} \Leftrightarrow x^3 - 8x - 1 - 2\sqrt{10-x^2} = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 8x - 3 + 2\left(1 - \sqrt{10-x^2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(x^2+3x+1\right) + 2.\dfrac{1-(10-x^2)}{1+\sqrt{10-x^2}} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(x^2+3x+1\right) + 2.\dfrac{9-x^2}{1+\sqrt{10-x^2}} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left[x^2+3x+1+\dfrac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x^2+3x+1+\dfrac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}} = 0 \ \text{(vo nghiem vì x} \ \ \ge 0) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 3$

Vậy $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$

Cách 3:

Đặt $\vec{a} = \left(x; \sqrt{12-x^2}\right); \vec{b} = \left(\sqrt{12-y}; \sqrt{y}\right)$

$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \sqrt{12}$

(1) $\Leftrightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 = 2\vec{a}.\vec{b}$

$\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x = \sqrt{12-y}$

(2) $\Leftrightarrow x^3 - 8x - 3 = 2\sqrt{10-x^2} - 2$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+1) = 2\frac{(3-x)(3+x)}{\sqrt{10-x^2}+1}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 3$$

$$(x^2+3x+1)(\sqrt{10-x^2}+1) - 2(3+x) = 0$$

Đặt $f(x) = (x^2+3x+1)(\sqrt{10-x^2}+1) - 2(3+x)$

$f'(x) < 0\,\forall x > 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hpt trên: (3;3)

<u>Bài 2</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(1-y)\sqrt{x-y}+x = 2+(x-y-1)\sqrt{y}\\ 2y^2-3x+6y+1 = 2\sqrt{x-2y}-\sqrt{4x-5y-3}\end{cases}$ **(ĐH khối B – 2014)**

<u>Giải</u>

Điều kiện: $\begin{cases}y \ge 0\\ x \ge 2y\\ 4x-5y \ge 3\end{cases}$

Phương trình thứ nhất viết lại thành

$$(1-y)\sqrt{x-y} - (1-y) + (x-y-1) = (x-y-1)\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-y)(x-y-1)}{\sqrt{x-y}+1} = (x-y-1)\frac{y-1}{\sqrt{y}+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\\ x=y+1\end{array}\right.$$

TH1 : $y = 1$ thay xuống (2) ta có

$$9-3x = 2\sqrt{x-2} - \sqrt{4x-8} \Leftrightarrow x = 3\,(TM)$$

TH2 : $x = y+1$ thay xuống (2) ta có

$$2y^2+3y-2 = 2\sqrt{1-y} - \sqrt{1-y}$$

$$\Leftrightarrow 2y^2+3y-2-\sqrt{1-y} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(y^2+y-1) + (y-\sqrt{1-y}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2+y-1)\left(2+\frac{1}{y+\sqrt{1-y}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}(TM)$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y) = (3;1), (\frac{\sqrt{5}+1}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{2})$.

Bài 3 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y(x^2+2x+2)=x(y^2+6) \\ (y-1)(x^2+2x+7)=(x+1)(y^2+1) \end{cases}$

Giải

ĐK: $x,y \in R$

Đặt $\begin{cases} a=x+1 \\ b=y \end{cases}$, ta có hệ trở thành: $\begin{cases} b(a^2+1)=(a-1)(b^2+6) \\ (b-1)(a^2+6)=a(b^2+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(b^2+6)=b(a^2+1)\ (*) \\ (b-1)(a^2+6)=a(b^2+1)(**) \end{cases}$

Trừ vế theo vế hai phương trình rồi thu gọn ta có:

$(a-b)(a+b-2ab+7)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b-2ab+7=0 \end{array}\right.$

❖ Trường hợp 1: $a=b$ thay vào phương trình (*) ta có:

$(a-1)(a^2+6)=a(a^2+1) \Leftrightarrow a^2-5a+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow$ hệ có 2 nghiệm (x; y) là:

❖ Trường hợp 2: $a+b-2ab+7=0$

Trừ vế theo vế hai phương trình (*) và (**) rồi rút gọn ta có: $\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\left(b-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

Vậy ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a+b-2ab+7=0 \\ \left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\left(b-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{2} \end{cases}$

Đây là hệ đối xứng loại I, giải hệ ta có các nghiệm: $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}; \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases}; \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}; \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$

Từ đó ta có các nghiệm (x; y) là: $(1;2),(2;3),(1;3),(2;2)$.

Kết luận: Hệ phương trình có 4 nghiệm là: $(1;2),(2;3),(1;3),(2;2)$.

Bài 4 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-12x-y^3+6y^2-16=0 \\ 4x^2+2\sqrt{4-x^2}-5\sqrt{4y-y^2}+6=0 \end{cases}$

Giải

ĐK: $x \in [-2;2], y \in [0;4]$

Ta có $PT(1) \Leftrightarrow (x+2)^3-6(x+2)=y^3-6y^2$

Xét hàm số $f(t)=t^3-6t, t \in [0;4]$ ta có $f'(t)=3t^2-12t=3t(t-4) \le 0, \forall t \in [0;4] \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $[0;4]$. Mà phương trình (1) có dạng: $f(x+2)=f(y) \Leftrightarrow y=x+2$ thay vào phương trình (2) ta có: $4x^2+6=3\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x=0$ từ đó ta có y = 2.

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm (0; 2).

Bài 5 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-2\sqrt{y+1}=3 \\ x^3-4x^2\sqrt{y+1}-9x-8y=-52-4xy \end{cases}$.

Giải

ĐK: $y \ge -1$.

$$HPT \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+2\sqrt{y+1} \\ x^3-4x^2\sqrt{y+1}+4xy+4x-13x-8y+52=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3+2\sqrt{y+1} \\ x(x-2\sqrt{y+1})^2-13x-8y+52=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3+2\sqrt{y+1} \\ -x-2y+13=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3+2\sqrt{y+1} \\ \sqrt{y+1}=5-y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3+2\sqrt{y+1} \\ y\le 5 \\ y^2-11y+24=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3+2\sqrt{y+1} \\ y\le 5 \\ \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$.

Bài 6 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{y-2x+\sqrt{y}-x}{\sqrt{xy}}+1=0 \\ \sqrt{1-xy}+x^2-y^2=0 \end{cases}$

ĐK: $x>0; y>0; xy\le 1$

$(1) \Leftrightarrow y-2x+\sqrt{y}-\sqrt{x}+\sqrt{xy}=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{y}+2\sqrt{x}+1\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{y}=\sqrt{x} \Leftrightarrow y=x$ thay vào

(2), ta được: $\sqrt{1-x^2}=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$

KL: hệ pt có tập nghiệm: $S=\left\{(1;1)\right\}$

Bài 7 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2\left(x^3+y^3\right)}{xy} - \dfrac{3\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{xy}} + 5\left(x+y\right) = 8\sqrt{xy} \\ \sqrt{5x-1} + \sqrt{2-y} = \dfrac{5x+y}{2} \end{cases}$

ĐK: $x \ge \frac{1}{5}; 0 < y \le 2$

Đặt $u = x+y, u > 0; v = \sqrt{xy}, v > 0$ khi đó

$\left(1\right) \Leftrightarrow 2u^3 - 3u^2v - uv^2 - 2v^3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{u}{v} - 2\right)\left(2\left(\frac{u}{v}\right)^2 + \frac{u}{v} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{u}{v} = 2 \Leftrightarrow u = 2v$

$\Rightarrow x + y = 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$ thay vào $\left(2\right)$, ta được:

$\sqrt{5x-1} + \sqrt{2-x} = 3x \Leftrightarrow \frac{5x-5}{\sqrt{5x-1}+2} + \frac{1-x}{\sqrt{2-x}+1} = 3x - 3 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2} - \frac{1}{\sqrt{2-x}+1} - 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ \dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+2} - \dfrac{1}{\sqrt{2-x}+1} - 3 = 0 \;\; VN \text{ vì } \dfrac{1}{5} \le x \le 2 \end{array}\right.$

KL: tập nghiệm của hệ pt là: $S = \left\{\left(1;1\right)\right\}$

Bài 8 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x^3+x+1}{y^2} + \left(2x+1\right)\left(1 - \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{x^2}{y^2}\left(3y-1\right) - \dfrac{\left(x-y\right)^2}{x-y} \\ \dfrac{x^3-x^2-1}{y^2} + \dfrac{4}{y} - 1 = 0 \end{cases}$

ĐK: $y \ne 0$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-y\right)^3 + \left(x-y\right)^2 + \left(x-y\right) + 1 = 0 \\ x^3 - x^2 - 1 + 4y - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-y+1\right)\left(\left(x-y\right)^2 + 1\right) = 0 \\ x^3 - x^2 - 1 + 4y - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

KL: $S = \left\{\left(1;2\right)\right\}$

Bài 9 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{4x^2+3xy-7y^2} + 4\left(x^2+5xy-6y^2\right) = \sqrt{3x^2-2xy-y^2} \\ 3x^2 + 10xy + 34y^2 = 47 \end{cases}$

ĐK: $\begin{cases} 3x^2 - 2xy - y^2 \ge 0 \\ 4x^2 + 3xy - 7y^2 \ge 0 \end{cases}$

Chuyển vế nhân liên hợp ở phương trình (1), ta được:

$$\left(x^2+5xy-6y^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+3xy-7y^2}+\sqrt{3x^2-2xy-y^2}}+4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=y & (n)\\ x=-6y & (n)\end{array}\right.$$

Với $x=y$ thay vào (2), ta được: $x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=1\\ x=-1\Rightarrow y=-1\end{array}\right.$

Với $x=-6y$ thay vào (2), ta được: $82y^2=47\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\sqrt{\frac{47}{82}}\Rightarrow x=-6\sqrt{\frac{47}{82}}\\ y=-\sqrt{\frac{47}{82}}\Rightarrow x=6\sqrt{\frac{47}{82}}\end{array}\right.$

KL: $S=\left\{(1;1),(-1;-1),\left(\sqrt{\frac{47}{82}};-6\sqrt{\frac{47}{82}}\right);\left(-\sqrt{\frac{47}{82}};6\sqrt{\frac{47}{82}}\right)\right\}$

<u>Bài 10</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+3xy-3(x-y)=0\\ x^4+9y(x^2+y)-5x^2=0\end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+3y=3x-3xy\\ \left(x^2+3y\right)^2+3x^2y-5x^2=0\end{cases}$

Thay (1) vào (2), ta được: $x^2\left(9y^2-15y+4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0\Rightarrow y=0 & \\ y=\frac{1}{3}\Rightarrow x=1 & \\ y=\frac{4}{3}\Rightarrow x^2+x+4=0 & VN\end{array}\right.$

KL: $S=\left\{(0;0);\left(1;\frac{1}{3}\right)\right\}$

<u>Bài 11</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+2)^2+4(y-1)^2=4xy+13\\ \sqrt{\frac{x^2-xy-2y^2}{x-y}}+\sqrt{x+y}=\frac{2}{\sqrt{x^2-y^2}}\end{cases}$

ĐK: $\begin{cases}x+y>0\\ x-y>0\\ x-2y\ge 0\end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 8y - 5 = 0 \\ (x+y)\sqrt{x-2y} + (x+y)\sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$

Ta có PT $(1) \Leftrightarrow (x-2y)^2 + 4(x-2y) - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ x - 2y = -5 \quad (l) \end{array}\right.$

Với $x = 2y + 1$ thay vào (2), ta được:

$(3y+1)\sqrt{y+1} = 1 - 3y \Rightarrow 9y^3 + 6y^2 + 13y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = 1$ thỏa mãn

KL: $S = \{(1;0)\}$

Bài 12 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2 - 5)\sqrt{x^2 - 2y} + x^2 + 3 = 2y\left(\sqrt{x^2 - 2y} + 1\right) \\ x^2 + 3y = 6 \end{cases}$

ĐK: $x \geq 2y$

Ta có $(2) \Leftrightarrow x^2 = 6 - 3y$ thay vào (1) ta được: $(1-5y)\sqrt{6-5y} = 5y - 9 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ thỏa mãn

KL: $S = \left\{\left(\sqrt{3};1\right);\left(-\sqrt{3};1\right)\right\}$

Bài 13 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (y-1)\dfrac{x^2 - y}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y-1}} = 2 \\ (x^2 + 4y)\sqrt{x^2 - 1} + 6 = 5\sqrt{x^2 - 1}\left(1 + \sqrt{(x^2 - 1)(y-1)}\right) \end{cases}$

ĐK: $\begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ y \geq 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y-1} \neq 0 \end{cases}$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{x^2 - 1}, a \geq 0 \\ b = \sqrt{y-1}, b \geq 0 \end{cases}$, ta được: $\begin{cases} b^2(a-b) = 2 \\ a^3 + 4ab^2 - 5a^2b = 6 \end{cases}$

Nhân chéo hai phương trình giải hệ đẳng cấp ta đươc tập nghiệm: $S = \left\{\left(\sqrt{10};2\right);\left(-\sqrt{10};2\right)\right\}$

Bài 14 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} -20y^3 - 3y^2 + 3xy + x - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 3y = 1 \end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} -20y^3 - y(3y-1) + x(3y+1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 3y + 1 \end{cases}$.

Thế (2) vào (1), ta được phương trình thuần nhất bậc 3

KL: $S\left\{\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{-3}{5};\frac{-1}{5}\right)\right\}$

Bài 15 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 3y + \sqrt{x^2 + 3y^2} = 0 \\ \sqrt{2y-1} + 2x^2 - y^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases}$

ĐK: $y \geq \frac{1}{2}$

Ta có PT $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3y^2} = 3y - x \Leftrightarrow \begin{cases} 3y \geq x \\ 6y^2 - 6xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y \geq x \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \quad (l) \\ x = y \end{array}\right. \end{cases}$

Với $x = y$ thay vào (2), ta được:

$$\sqrt{2y-1} = -y^2 + 3y - 1 \Rightarrow y^4 - 6y^3 + 11y^2 - 8y + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = 2 + \sqrt{2} \quad (l) \\ y = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2} \end{array}\right.$$

KL: $S = \left\{(1;1);\left(2-\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right)\right\}$

Bài 16 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{3\left(x^4 + y^4\right) + 2x^2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \\ xy^2 + 3y^2 + 4x = 8 \end{cases}$

ĐK: $x.y \neq 0$

Ta có PT $(1) \Leftrightarrow \left(x^2 - y^2\right)^2\left(\dfrac{x^4 - x^2y^2 + y^4}{x^2y^2\left(x^2 + y^2\right)^2}\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right.$

- Với $x = y$ thay vào (2), ta được: $x = 1 \Rightarrow y = 1$
- Với $x = -y$ thay vào (2), ta được: $y = -1 \Rightarrow x = 1$

KL: $S = \left\{(1;1);(1;-1)\right\}$

Bài 17 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0 \\ \sqrt{x^3 + xy + 6y} - \sqrt{y^3 + x^2 - 1} = 2 \end{cases}$

ĐK: $\begin{cases} x^3 + xy + 6y \geq 0 \\ y^3 + x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$

Ta có PT $(1) \Leftrightarrow 10x^2 - 2x(y+19) + 5y^2 - 6y + 41 = 0$.

Tính $\Delta'_x = -49(y-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow y = 1$ thay vào (1) được $x = 2$ thỏa hệ phương trình

KL: $S = \{(2;1)\}$

Bài 18 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 - x^2y + xy^2 - 2xy - x + y = 0 \\ \sqrt{x-y} = x^3 - 2x^2 + y + 2 \end{cases}$

ĐK: $x \geq y$

Ta có PT $(1) \Leftrightarrow (x - y - 1)(x^2 + y^2 + x - y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x - 1 \\ x^2 + y^2 + x - y = 0 \end{array}\right.$

- $y = x - 1$ thay vào (2), ta được: $x^3 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$
- $x^2 + y^2 + x - y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \quad (\text{vì } x - y \geq 0)$ thay vào hệ không thỏa

KL: $S\{(1;0);(0;-1)\}$

Bài 19 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2 + 8x^2 = 3 - \left(1 + 3\sqrt[3]{y^2-1}\right)\sqrt[3]{y^2-1} \\ 4 - 3\sqrt[3]{(y^2-1)^2} - 2\sqrt[3]{y^2-1} = 12x^2 + y^2 - \sqrt{1-4x^2} \end{cases}$

ĐK: $\frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt[3]{y^2-1} \\ b = \sqrt{1-4x^2}, b \geq 0 \end{cases}$, ta có: $\begin{cases} a^3 + 3a^2 + 2a - 3b^2 - b = 0 \\ a^3 + 3a^2 + a - 2b^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b^2 + b$ thay vào (1), ta được:

$(b^2 + b)^3 + 3(b^2 + b)^2 + 2(b^2 + b) - 3b^2 - b = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow a = 0$.

Khi đó ta có: $\begin{cases} \sqrt{1-4x^2} = 0 \\ \sqrt[3]{y^2-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{1}{2} \\ y = \pm 1 \end{cases}$

KL: $S=\left\{\left(\frac{1}{2};1\right);\left(\frac{1}{2};-1\right);\left(-\frac{1}{2};1\right);\left(-\frac{1}{2};-1\right)\right\}$

Bài 20 Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3x^6-24y^3+\left(2y-x^2\right)\left(9x^2+18y-11\right)=0\\1+\sqrt[3]{2\sqrt{2y}+1}=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x+6y-1}\end{cases}$

ĐK: $y\ge 0$

Ta có PT $(1)\Leftrightarrow\left(x^2-2y\right)\left(3x^4+6x^2y-9x^2+12y^2-18y+1\right)=0$

Với $x^2=2y$ thay vào (2), ta được:

$$1+\sqrt[3]{2x+1}=\sqrt{x}+\sqrt[3]{4x-1}\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{2}{\sqrt[3]{(4x-1)^2}+\sqrt[3]{4x-1}\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=\frac{1}{2}$

KL: $S=\left\{\left(1;\frac{1}{2}\right)\right\}$

Bài 21 Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{x+y}{xy}+xy=\frac{2(x-y)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{2}{\sqrt{xy}}\\\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{x}}+x+y=4\end{cases}$

ĐK: $x>0;y>0$

Ta có PT $(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}+xy\right)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{x}-\sqrt{y}=xy\Rightarrow x+y=x^2y^2+2\sqrt{xy}$ thay vào (2) ta được:

$\left(\sqrt{xy}-1\right)\left(xy\sqrt{xy}+xy+\sqrt{xy}+4\right)=0\Leftrightarrow xy=1$

Khi đó ta có: $\begin{cases}x+y=3\\xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\\y=\frac{3\mp\sqrt{5}}{2}\end{cases}$

KL: thay vào hệ ta có tập nghiệm: $S=\left\{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$

Bài 22 Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x+2\sqrt{\frac{x-1}{y-1}}+\frac{4}{y-1}-\frac{4}{\sqrt{y-1}}+\sqrt{x-1}=0\\(y-1)(x-1)\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-1}-\frac{y-1}{2}=2\end{cases}$

ĐK: $x \ge 1; y > 1$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{x-1}, a \ge 0 \\ b = \sqrt{y-1}, b > 0 \end{cases}$. Ta có $(1) \Leftrightarrow (b-2)^2 + a^2b^2 + 2ab + ab^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 0 \\ \sqrt{y-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$ thỏa hệ phương trình

KL: $S = \{(1;5)\}$

Bài 23 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x + 3\sqrt{y}}{4y + \sqrt{2x+y}} = 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{3x-4y-8}} - \dfrac{1}{\sqrt{y-1}} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

ĐK: $\begin{cases} y > 1 \\ 2x + y \ge 0 \\ 3x - 4y \ne 8 \end{cases}$

Ta có $(1) \Leftrightarrow (x - 4y)\left(1 - \dfrac{2}{3\sqrt{y} + \sqrt{2x+y}}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 4y$ thay vào (2), ta được:

$\dfrac{1}{2\sqrt[3]{y-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{y-1}} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2}a^2 - a^2 = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow (a-1)(2a^2 + a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \qquad \left(a = \dfrac{1}{\sqrt[6]{y-1}}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[6]{y-1}} = 1 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 8$

KL: $S = \{(8;2)\}$

Bài 24 Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x-1}(1-2y) - y + 2 = 0 \\ y(y + \sqrt{x-1}) + x - 4 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

Giải

Điều kiện: $x \ge 1.$

Đặt $t = \sqrt{x-1},\ t \ge 0.$ Khi đó $x = t^2 + 1$ và hệ trở thành

$$\begin{cases} t(1-2y) - y + 2 = 0 \\ y(y+t) + t^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - y - 2ty + 2 = 0 \\ y^2 + ty + t^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-y) - 2ty + 2 = 0 \\ (t-y)^2 + 3ty - 3 = 0 \end{cases}$$

Suy ra $2(t-y)^2 + 3(t-y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - y = 0 \\ t - y = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = t \\ y = t + \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

❖ Với $y = t,$ ta có $-2t^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$ Suy ra $x = 2,\ y = 1.$

❖ Với $y = t + \frac{3}{2}$, ta có $-\frac{3}{2} - 2t\left(t + \frac{3}{2}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 + 6t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-3+\sqrt{13}}{4}$.

Suy ra $x = \frac{19-3\sqrt{13}}{8}$, $y = \frac{3+\sqrt{13}}{4}$.

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ là

<u>Bài 25</u> Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} (x+2)\sqrt{x^2+4x+7} + y\sqrt{y^2+3} + x + y + 2 = 0 \\ \sqrt{x^2+y+1} = x - y + 1 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện: $x^2 + y + 1 \geq 0$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{(x+2)^2+3} + x + 2 = -y\sqrt{(-y)^2+3} - y$

Xét hàm số $f(t) = t\sqrt{t^2+3} + t$ Có $f'(t) = \sqrt{t^2+3} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+3}} + 1 > 0\ \forall t$

$\Rightarrow$ Hàm số f(t) đồng biến trên R $\Rightarrow$ Phương trình (1) $\Leftrightarrow x + 2 = -y$

Thay vào (2) ta có

$$\sqrt{x^2-x-1} = 2x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x^2 - x - 1 = 4x^2 + 12x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x^2 - x - 1 = 4x^2 + 12x + 9 \end{cases}$$

:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ 3x^2 + 13x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\frac{10}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -1 \quad \text{(tmdk)}$$

Vậy hệ có nghiệm (x;y) = (-1;-1).

<u>Bài 26</u> Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} (53-5x)\sqrt{10-x} + (5y-48)\sqrt{9-y} = 0 \\ \sqrt{2x-y+6} + x^2 = \sqrt{-2x+y+11} + 2x + 66 \end{cases} (\forall x, y \in \mathbb{R}) \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

<u>Giải</u>

ĐK: $\begin{cases} 10 - x \geq 0 \\ 9 - y \geq 0 \\ 2x - y + 6 \geq 0 \\ -2x + y + 11 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 10 \\ y \leq 9 \\ 2x - y + 6 \geq 0 \\ -2x + y + 11 \geq 0 \end{cases}$

Từ PT(1) ta có $\left[5(10-x)+3\right]\sqrt{10-x} = \left[5(9-y)+3\right]\sqrt{9-y}, (3)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\left(5t^2+3\right)t$ trên khoảng $t\in\left[0;+\infty\right)$ có $f'\left(t\right)=15t^2+3>0,\forall t\ge 0$ hàm số đồng biến .Từ (3) ta có $f\left(\sqrt{10-x}\right)=f\left(\sqrt{9-y}\right)\Leftrightarrow\sqrt{10-x}=\sqrt{9-y}\Leftrightarrow y=x-1,\left(4\right)$ Thay (4) vào (2) ta được $\sqrt{x+7}-\sqrt{10-x}+x^2-2x-66=0\,(5)$ ĐK: $x\in\left[-7;10\right]$

Giải (5) ta được

$\left(\sqrt{x+7}-4\right)+\left(1-\sqrt{10-x}\right)+x^2-2x-63=0\Leftrightarrow\dfrac{x-9}{\sqrt{x+7}+4}+\dfrac{x-9}{1+\sqrt{10-x}}+\left(x-9\right)\left(x+7\right)=0$

$\left(x-9\right)[\dfrac{1}{\sqrt{x+7}+4}+\dfrac{1}{1+\sqrt{10-x}}+\left(x+7\right)]=0\Leftrightarrow x=9,y=8$

Vậy Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(9;8\right)$

Bài 27 Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{1-x}}-\dfrac{\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{y}}+x+y=1\\ \sqrt{1-x}+\sqrt{4+y}=2\sqrt{2}\end{cases}$

Giải

ĐK: $0\le x;y\le 1$

PT(1) $\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{1-x}}+x=\dfrac{\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{1-(1-y)}}+1-y$ (*)

xét h/s $f(t)=\dfrac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{1-t}}+t$; có $f'(t)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{t}}(1+\sqrt{1-t})+\dfrac{1}{2\sqrt{1-t}}.\sqrt{t}}{(1+\sqrt{1-t})^2}+1>0\quad,\forall t\in(1;+\infty)$

vì (*) $\Leftrightarrow f(x)=f(1-y)\Leftrightarrow x=1-y$, thế vào pt(2) ta được :

$\sqrt{1-x}+\sqrt{5-x}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow 6-2x+2\sqrt{5-6x+x^2}=8$

$\Leftrightarrow\sqrt{5-6x+x^2}=x+1\Leftrightarrow 5-6x+x^2=(x+1)^2\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$ (tmđk)

vậy hệ pt có nghiệm là $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Bài 28 Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}27x^3y^3+7y^3=8\\ 9x^2y+y^2=6x\end{cases}$

Giải

Nhận xét $y\ne 0,$ nhân hai vế phương trình thứ hai với $7y$, trừ đi phương trình thứ nhất, được

$$(3xy)^3-7(3xy)^2+14(3xy)-8=0$$

Từ đó tìm được hoặc $3xy=1$ hoặc $3xy=2$ hoặc $3xy=4$

Với $3xy=1,$ thay vào phương trình thứ nhất, được y=1 do đó $\dfrac{1}{3}$

Với $3xy = 2,$ thay vào phương trình thứ nhất, được y=0 (loại)

Với $3xy = 4,$ thay vào phương trình thứ nhất, được y=-2 do đó $x = -\dfrac{2}{3}$

Bài 29 Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3 - y^3 = 4x + 2y \\ x^2 + 3y^2 = 4 \end{cases}$

Giải

Phương trình $(1) \Leftrightarrow 2(x^3 - y^3) = 4(2x + y)$

Từ phương trình (2) thay $4 = x^2 + 3y^2$ vào phương trình trên và rút gọn ta được:

$$x^2y + 6xy^2 + 5y^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x = -y \\ x = -5y \end{array}\right.$$

TH1 : $y = 0$ thay vào hệ ta được $\begin{cases} x^3 = 4x \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow$ nghiệm $(x;y) = (\pm 2;0)$

TH2 : $x = -y \Leftrightarrow y = -x$ thay vào hệ ta được : $\begin{cases} 2x^3 = 2x \\ 4x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1$

Hệ có nghiệm $(x;y) = (1;-1); (-1;1)$

TH3 : $x = -5y$ thay vào hệ ta có nghiệm $(x;y) = (\frac{5}{\sqrt{7}};\frac{-1}{\sqrt{7}}); (\frac{-5}{\sqrt{7}};\frac{1}{\sqrt{7}})$

Vậy hệ đã cho có 6 nghiệm.

Bài 30 Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} (y-2).\sqrt{x+2} - x.\sqrt{y} = 0 \\ \sqrt{x+1}.\left(\sqrt{y}+1\right) = \left(y-3\right).\left(1+\sqrt{x^2+y-3x}\right) \end{cases}$ $(x;\ y \in R).$

Giải

ĐK: $\begin{cases} x \ge -1; y \ge 0 \\ x^2 + y - 3x \ge 0 \end{cases}$

PT $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+2}.y - x.\sqrt{y} - 2\sqrt{x+2} = 0$

có $\Delta_y = x^2 + 8\left(x+2\right) = \left(x+4\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{y} = \dfrac{2x+4}{2\sqrt{x+2}} \\ \sqrt{y} = \dfrac{-2}{4\sqrt{x+2}}\left(<0\right) \Rightarrow loai \end{array}\right.$

với $\sqrt{y} = \dfrac{2x+4}{2\sqrt{x+2}} \Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow y = x+2$, thế vào (1) ta được

$\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+2}+1\right) = \left(x-1\right)\left(1+\sqrt{x^2-2x+2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+1}.(\sqrt{x+2}+1) = \left(x-1\right).\left(\sqrt{\left(x-1\right)^2+1}\right)$ (*)

Xét hàm số $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)=t\sqrt{t^2+1}+t$, có $f'(t)=\sqrt{t^2+1}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}+1>0\Rightarrow f(t)$ đồng biến.

Vì PT (*) $\Leftrightarrow f(\sqrt{x+1})=f(x-1)\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x+1=(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=3$

Với x = 3 $\Rightarrow y=5$ (thỏa mãn). Vậy hệ có nghiệm (x; y) = (3; 5).

<u>Bài 31</u> Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}x^2+y^2+1=2x+2y\\ (2x-y)y=1+2y\end{cases}$

<u>Giải</u>

Lấy (1) + (2) vế theo vế ta được:

$x^2+2xy+1=1+2x+4y\Leftrightarrow x(x+2y)=2(x+2y)\Leftrightarrow(x-2)(x+2y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x+2y=0\end{array}\right.$

Trường hợp x=2 thay vào (2) ta có y = 1

Trường hợp x+2y = 0 thay vào (2) ta được phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm x = 2; y = 1.

<u>Bài 32</u> Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}xy(y+1)+y^2+1=4y\\ xy^2(x+2)+\dfrac{1}{y^2}+y^2=5\end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện $y\neq 0$

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}x(y+1)+y+\dfrac{1}{y}=4\\ y^2(x^2+2x+1)+\dfrac{1}{y^2}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y(x+1)+\dfrac{1}{y}+x=4\\ y^2(x+1)^2+\dfrac{1}{y^2}=5\end{cases}$$

Đặt $u=y(x+1)+\dfrac{1}{y};v=x+1$ ta có hệ

$$\begin{cases}u+v=5\\ u^2-2v=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=5-u\\ u^2+2u-15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=-5\\ v=10\end{cases}\vee\begin{cases}u=3\\ v=2\end{cases}$$

$$hay\ \begin{cases}y(x+1)+\dfrac{1}{y}=-5\\ x+1=10\end{cases}\vee\begin{cases}y(x+1)+\dfrac{1}{y}=3\\ x+1=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}10y^2+5y+1=0\\ x=9\end{cases}\vee\begin{cases}2y^2-3y+1=0\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\wedge y=1\\ x=1\wedge y=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Vậy hệ có các nghiệm (1;1) và (1; 1/2).

Bài 33 Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+\dfrac{2y}{x}=1 \\ x^2+y^2+\dfrac{4x}{y}=22 \end{cases}$

Giải

Điều kiện: $x \neq 0$, $y \neq 0$. và $x^2 + y^2 - 1 \neq 0$.

Đặt $u = x^2 + y^2 - 1$ và $v = \dfrac{x}{y}$ Hệ phương trình (I) trở thành $\begin{cases} \dfrac{3}{u}+\dfrac{2}{v}=1 \\ u=21-4v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v^2-13v+21=0 \\ u=21-4v \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u=9 \\ v=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=7 \\ v=\dfrac{7}{2} \end{cases}$ + Với $\begin{cases} u=9 \\ v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$ Với $\begin{cases} u=7 \\ v=\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} x=14\sqrt{\dfrac{2}{53}} \\ y=4\sqrt{\dfrac{2}{53}} \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} x=-14\sqrt{\dfrac{2}{53}} \\ y=-4\sqrt{\dfrac{2}{53}} \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm (3;1), (-3;-1), $\left(14\sqrt{\dfrac{2}{53}};4\sqrt{\dfrac{2}{53}}\right)$ và $\left(-14\sqrt{\dfrac{2}{53}};-4\sqrt{\dfrac{2}{53}}\right)$.

Bài 34 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x-1}-\sqrt{y}=1-x^3 \\ (x-1)^4=y \end{cases}$ (I) .

Điều kiện: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Ta có (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}-(x-1)^2=1-x^3 \\ (x-1)^4=y \end{cases}$

Từ phương trình : $\sqrt{x-1}-(x-1)^2=1-x^3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=-x^3+x^2-2x+2$ (1)

Ta thấy hàm số $f(x)=\sqrt{x-1}$ là hàm đồng biến trên $[1;+\infty)$

Xét hàm số $g(x)=-x^3+x^2-2x+2$. Miền xác định: $D=[1;+\infty)$

Đạo hàm $g'(x)=-3x^2+2x-2<0 \quad \forall x \in D$. Suy ra hàm số nghich biến trên D.

Từ (1) ta thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình và đó là nghiệm duy nhất.

Vậy hệ có nghiệm $(1;0)$.

Bài 35 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{3+x^2}+2\sqrt{x}=3+\sqrt{y} \\ \sqrt{3+y^2}+2\sqrt{y}=3+\sqrt{x} \end{cases}$ (II). Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Ta có (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3+x^2}+2\sqrt{x}=3+\sqrt{y} \\ 3+\sqrt{x}=\sqrt{3+y^2}+2\sqrt{y} \end{cases}$

Cộng vế theo vế ta có: $\sqrt{3+x^2}+3\sqrt{x}+3=\sqrt{3+y^2}+3\sqrt{y}+3$ (2)

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{3+t^2}+3\sqrt{t}+3$. Miền xác định: $D=\left[1;+\infty\right)$

Đạo hàm: $f^{/}(t)=\dfrac{t}{\sqrt{3+t^2}}+\dfrac{3}{2\sqrt{t}}+1>0 \quad \forall x\in D$. Suy ra hàm số đồng biến trên D.

Từ (*) ta có $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$

Lúc đó: $\sqrt{3+x^2}+\sqrt{x}=3$ (3)

+ VT (3) là hàm số hàm đồng biến trên D.

+ VP (3) là hàm hằng trên D.

Ta thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình (3) (thỏa điều kiện)

Suy ra phương trình có nghiệm $x=1$ là nghiệm duy nhất.

Vậy hệ có nghiệm $\left(1;1\right)$

<u>Bài 36</u> Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2y^3+2.x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}-y & (1) \\ y+1=2x^2+2xy\sqrt{1+x} & (2) \end{cases}$

ĐK : $1\ge x\ge -1$

Từ (1) ta có : $2.y^3+2(x-1)\sqrt{1-x}+2\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}-y$ (thêm vào vế trái $2\sqrt{1-x}$)

$\Leftrightarrow 2y^3+y=2(\sqrt{1-x})^3+\sqrt{1-x}$

Xét hàm số *f(t) = 2.t*^{3} *+t có f'(t) = 6t*^{2} *+ 1 >0* suy ra hàm số đồng biến

Suy ra y $=\sqrt{1-x}$ thế vào (2), ta có $\sqrt{1-x}+1=2x^2+2x\sqrt{1-x^2}$ *(3)*

Vì $1\ge x\ge -1$ nên đặt *x = cos(t) với t* $\subset [0;\pi]$ sau đó thế vào phương trình *(3)* là ra kết quả.

<u>Bài 37</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{5} & (1) \\ 4x^2+3x-\dfrac{57}{25}=-y(3x+1) & (2) \end{cases}$

<u>Giải</u>

ĐK: $x,y\in R$

Nhân 2 vế phương trình (1) với 25 và nhân 2 vế phương trình (2) với 50 ta có:

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 25x^2+25y^2=5 \\ 200x^2+150x-114=-50y(3x+1) \end{cases}$

Cộng vế theo vế hai phương trình của hệ ta có:

$225x^2+25y^2+25+150xy+150x+50y=144$

$\Leftrightarrow \left(15x+5y+5\right)^2=144 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 15x+5y+5=12 \\ 15x+5y+5=-12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 15x+5y=7 \\ 15x+5y=-17 \end{array}\right.$

❖ Với $15x+5y=7$ kết hợp với (1) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}15x+5y=7\\ x^2+y^2=\dfrac{1}{5}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5y=7-15x\\ 25x^2+25y^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5y=7-15x\\ 25x^2+\left(7-15x\right)^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5y=7-15x\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{11}{25}\\ x=\dfrac{2}{5}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{11}{25}\\ y=\dfrac{2}{25}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{2}{5}\\ y=\dfrac{1}{5}\end{cases}\end{array}\right.$$

❖ Với $15x+5y=-17$ kết hợp với (1) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}15x+5y=-17\\ x^2+y^2=\dfrac{1}{5}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5y=-17-15x\\ 25x^2+25y^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5y=-17-15x\\ 25x^2+\left(-17-15x\right)^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5y=7-15x\\ x\in\phi\end{cases} \Rightarrow \text{ hệ vô nghiệm.}$$

Kết luận: Hệ phương trình có hai nghiệm là: $\begin{cases}x=\dfrac{2}{5}\\ y=\dfrac{1}{5}\end{cases};\ \begin{cases}x=\dfrac{11}{25}\\ y=\dfrac{2}{25}\end{cases}.$

<u>Bài 38</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{3x+2y}=-1 & (1)\\ \sqrt{x+y}+x-y=0 & (2)\end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện : $\begin{cases}x+y\ge 0\\ 3x+2y\ge 0\end{cases}$

Hệ Phương trình tương đương

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+1=\sqrt{3x+2y}\\ \sqrt{x+y}=y-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y+2\sqrt{x+y}+1=3x+2y\\ \sqrt{x+y}=y-x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\sqrt{x+y}=2x-y\\ \sqrt{x+y}=y-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\left(y-x\right)=2x-y\\ \sqrt{x+y}=y-x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 1 \\ \sqrt{x + y} = y - x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 1 \\ \sqrt{5x - 1} = 3x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 1 \\ x \geq \dfrac{1}{3} \\ 5x - 1 = 9x^2 - 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 1 \\ x \geq \dfrac{1}{3} \\ 9x^2 - 11x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 1 \\ x \geq \dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{2}{9} \end{array}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Kết luận : Hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

<u>Bài 39</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{2x^2 - y^2} = y^2 - 2x^2 + 3 \quad (1) \\ x^3 - 2y^3 = y - 2x \quad (2) \end{cases}$

<u>Giải</u>

ĐK: $2x^2 - y^2 \geq 0$

Đặt : $t = \sqrt{2x^2 - y^2}$ $(t \geq 0)$

$$(1) \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - y^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - y^2 = 1$$

Khi đó hệ phương trình tương đương $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ x^3 - 2y^3 = y - 2x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ x^3 - 2y^3 = (y - 2x)(2x^2 - y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ 5x^3 - 2x^2y - 2xy^2 - y^3 = 0 \; (3) \end{cases}$$

Th 1: $y = 0$

Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} 2x^2 = 1 \\ x^3 = \end{cases}$ (vô lí)

Vậy cặp (x , 0) không là nghiệm của hệ

TH2 : Chia hai vế (3) cho y^3 ta có hệ phương trình tương đương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ 5\left(\frac{x}{y}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{array}\right.$$

Kết luận : Hệ phương trình có nghiệm $S = \left\{(1;1), (-1;-1)\right\}$

<u>Bài 40</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6xy - \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{9}{8} = 0 \\ 2y - \frac{1}{x-y} + \frac{5}{4} = 0 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện: $x - y \neq 0$

Hệ phương trình biến đổi tương đương

$$\begin{cases} 2(x+y)^2 - (x-y)^2 - \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{9}{8} = 0 \\ (x+y) - (x-y) - \frac{1}{x-y} + \frac{5}{4} = 0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a = x + y \\ b = x - y + \frac{1}{x-y} \end{cases}$

Ta có hệ tương đương $\begin{cases} 2a^2 - b^2 + 2 + \frac{9}{8} = 0 \\ a - b + \frac{5}{4} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - b^2 = -\frac{25}{8} \\ a - b = \frac{-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(b - \frac{5}{4}\right)^2 - b^2 = \frac{-25}{8} \\ a = b - \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{4} \\ b = \frac{-5}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm ( ) 7 3 13 3

<u>Bài 41</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\left(x+y+1\right)=25\left(y+1\right)\\x^2+xy+2y^2+x-8y=9\end{cases}$

<u>Giải</u>

Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\left(x+y+1\right)=25\left(y+1\right)\\x^2+y^2+x\left(y+1\right)+\left(y+1\right)^2-10\left(y+1\right)=0\end{cases}$$

Nhận xét $y+1=0$ không là nghiệm hệ phương trình

Chia hai vế phương trình một và hai cho $y+1$ ta có $\begin{cases}\dfrac{\left(x^2+y^2\right)\left(x+y+1\right)}{y+1}=25\\\dfrac{x^2+y^2}{y+1}+\left(x+y+1\right)=10\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}a=\dfrac{x^2+y^2}{y+1}\\b=x+y+1\end{cases}$

Khi đó ta có $\begin{cases}a.b=25\\a+b=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=5\left(y+1\right)\\x+y+1=10\end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(3;1\right),\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{11}{2}\right)$

<u>Bài 42</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(x^2+x\right)y^2-4y^2+y+1=0\\x^3y^3+x^2y^2-4y^3+xy+1=0\end{cases}$

<u>Giải</u>

Nhận xét $y=0$ không là nghiệm hệ phương trình

Chia hai vế phương trình một cho y^2 và hai y^3

$$\begin{cases}\left(x^2+x\right)-4+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{y}=0\\x^3+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{y^3}-4=0\end{cases}$$

Đặt $\begin{cases}a=x+\dfrac{1}{y}\\b=\dfrac{x}{y}\end{cases}$

Hệ phương trình biến đổi tương đương ta có :

$y \ge \frac{2}{3}; x \ge -5; 3y \ge x$

Phương trình (1) tương đương $(x+3)^2 = 4(3y-x)(y+1)$

$\Leftrightarrow x^2 + 2(5+2y)x - 12y^2 - 12y + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y - 1 \\ x = -6y - 9 \end{array}\right.$

Với $x = -6y - 9$

$x \ge -5 \Rightarrow -6y - 9 \ge -5 \Leftrightarrow y \le -1$ Suy ra phương trình vô nghiệm

Với $x = 2y - 1$ thay vào phương trình (2) ta có

$\sqrt{3y-2} - \sqrt{y+2} = 2y^2 - 3y - 2 \Leftrightarrow \frac{2(y-2)}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}} = (2y+1)(y-2)$

$$\begin{cases} a^2 + a - 2b = 4 \\ a^3 - \ \ ab = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2b = 4 - a \\ a\left(4 - a\right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $\left(x;y\right) = \left(1;1\right)$

<u>Bài 43</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - y} + \dfrac{5y}{x + y^2} = 4 \\ 5x + y + \dfrac{x^2 - 5y^2}{xy} = 5 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Hệ phương trinh tương đương:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - y} + \dfrac{5y}{x + y^2} = 4 \\ 5x + y + \dfrac{x}{y} - 5\dfrac{y}{x} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - y} + \dfrac{5y}{x + y^2} = 4 \\ 5\dfrac{x^2 - y}{x} + \dfrac{y^2 + x}{y} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - y} + \dfrac{5y}{x + y^2} = 4 \\ \dfrac{x^2 - y}{x} + \dfrac{y^2 + x}{5y} = 1 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a = \dfrac{x}{x^2 - y} \\ b = \dfrac{5y}{x^2 + y} \end{cases}$ khi đó ta có $\begin{cases} a + b = 4 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$

Hệ có nghiệm $\left(x;y\right) = \left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

<u>Bài 44</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + 3 = 2\sqrt{\left(3y - x\right)\left(y + 1\right)} \\ \sqrt{3y - 2} - \sqrt{\dfrac{x + 5}{2}} = xy - 2y - 2 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện ta có $\frac{2}{\ }$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ \dfrac{2}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}} = 2y-1(vn) \end{array}\right. \quad \text{Vì } \frac{2}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}} \le \frac{2}{\sqrt{2}}; 2y+1 \ge \frac{7}{3}$$

Vậy hệ có nghiệm (3 ;2)

<u>Bài 45</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2y^2-7y+10-x(y+3)}+\sqrt{y+1} = x+1 \\ \sqrt{y+1}+\dfrac{3}{x+1} = x+2y \end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện $2y^2-7y+10-x(y+3) \ge 0; y+1 \ge 0; x+1 > 0$

Ta có $\begin{cases} \sqrt{2y^2-7y+10-x(y+3)} = x+1-\sqrt{y+1} \\ (x+1)\sqrt{y+1}+3 = (x+2y)(x+1) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y^2-7y+10-x(y+3) = (x+1)^2-2(x+1)\sqrt{y+1}+y+1 \\ (x+1)\sqrt{y+1} = (x+2y)(x+1)-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2-7y+10-x(y+3) = (x+1)^2-2(x+1)(x+2y)+7 \\ (x+1)\sqrt{y+1} = (x+1)(x+2y)-3 \end{cases}$$

Phương trình (*) tương đương $2y^2-4y+2+3xy+x^2-3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-1=0 \\ x+2y-2=0 \end{array}\right.$

Với y = 1 – x thay vào phương trình (2) ta được

$(x+1)\sqrt{2-x} = -1+x-x^2$ (VN)

Với x = 2 – 2y thay vào phương trình (2) ta được phương trình đơn giản ẩn y.
Từ đó có nghiệm của hệ.

<u>Bài 46</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+x+\sqrt{x+2} = 2y^2+y+\sqrt{2y+1} \quad (1) \\ x^2+2y^2-2x+y-2=0 \quad (2) \end{cases}$

<u>Giải</u>

Lấy (1) – (2)

Ta có $x^2+3x+2+\sqrt{x+2} = 4y^2+2y+\sqrt{2y+1}$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(x+1)+\sqrt{x+2} = 4y^2+2y+\sqrt{2y+1}$

Xét hàm số : $f(t) = t^2+t+\sqrt{t+1}$

$\dfrac{1}{\sqrt{}}$

$$2\left(t+1\right)+\frac{1}{4\sqrt{t+1}}+\frac{1}{4\sqrt{t+1}}-1\geq\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

Suy ra $f'\left(t\right)>0$

Vậy $f\left(t\right)$ là hàm đồng biến

Suy ra $x+1=2y$

Thay $x=2y-1$ vào phương trình (2) ta có $\left(2y-1\right)^2+2y^2-2\left(2y-1\right)+y-2=0$

$$\Leftrightarrow 6y^2-7y+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow x=1 \\ y=\frac{1}{6}\Rightarrow x=\frac{-2}{3}\end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm $S=\left\{\left(1;2\right),\left(\frac{-2}{3};\frac{1}{6}\right)\right\}$

<u>Bài 47</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(3-x\right)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0 \\ \sqrt[3]{x+2}+2\sqrt{y+2}=5\end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện $x\leq 2;y\geq\frac{1}{2}$

Phương trình (1) tương đương : $\left(2-x\right)\sqrt{2-x}+\sqrt{2-x}=\left(2y-1\right)\sqrt{2y-1}+\sqrt{2y-1}$

$$\Leftrightarrow f\left(\sqrt{2-x}\right)=f\left(\sqrt{2y-1}\right).$$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+t$ ta có $f'\left(t\right)=3t^2+1>0$ sauy ra hàm số $f\left(t\right)$ đơn điệu tăng .

Từ đó suy ra $f\left(\sqrt{2-x}\right)=f\left(\sqrt{2y-1}\right)\Leftrightarrow\sqrt{2-x}=\sqrt{2y-1}\Leftrightarrow x=3-2y$ thay vào phương trình (2)

Ta có $\sqrt[3]{5-2y}+2\sqrt{y+2}=5$ (*)

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt[3]{5-2y} \\ v=\sqrt{y+2}\ \left(v\geq 0\right)\end{cases}$

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}u+2v=5 \\ u^3+2v^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} u=1;v=2 \\ u=\frac{-3-\sqrt{65}}{4};v=\frac{23+\sqrt{65}}{8} \\ u=\frac{\sqrt{65}-3}{4};v=\frac{23-\sqrt{65}}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=\frac{233+23\sqrt{65}}{32} \\ y=\frac{233-23\sqrt{65}}{32}\end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm

$$\left(\quad\right)\ \frac{23\sqrt{65}\quad 185}{}\ \frac{233\quad 23\sqrt{65}}{}\quad \frac{23\sqrt{65}\quad 185}{}\ \frac{233\quad 23\sqrt{65}}{}$$

<u>Bài 48</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Với $x = 0$ thay vào hệ phương trình ta có $\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{-3}{4} \end{cases}$ (mâu thuẫn)

Chia hai vế phương trình (1) cho x^3 ta có $2\dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^3 = 2x + x^3 \Leftrightarrow f\left(\dfrac{y}{x}\right) = f(x)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0$ sauy ra hàm số $f(t)$ đơn điệu tăng .

Từ đó suy ra $\dfrac{y}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = y\,(y > 0)$ Thay vào phương trình (2) ta có

$(x+2)\sqrt{x^2+1} = (x+1)^2$.(*)

Đặt $\begin{cases} u = x \\ v = \sqrt{x^2+1}\ (v \ge 0) \end{cases}$

(*) $\Leftrightarrow (u+2)v = v^2 + 2u \Leftrightarrow v^2 - uv - 2v + 2u = 0 \Leftrightarrow (v-u)(v-2) = 0 \Leftrightarrow v = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Vậy hệ có nghiệm $S = \left\{\left(-\sqrt{3};3\right),\left(\sqrt{3};3\right)\right\}$.

<u>Bài 49</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện : $\begin{cases} x \le \dfrac{3}{4} \\ y \le \dfrac{5}{2} \end{cases}$

Phương trình (1) biến đổi ta có $8x^3 + 2x = (6-2y)\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow (2x)^3 + 2x = \left(\sqrt{5-2y}\right)^3 + \sqrt{5-2y}$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ suy ra hàm số $f(t)$ đơn điệu tăng .

Từ đó suy ra $\Leftrightarrow f(2x) = f\left(\sqrt{5-2y}\right) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5-2y} \Leftrightarrow y = \dfrac{5-4x^2}{2}\,(x \ge 0)$

Thay vào Phuong trinh (2) ta có

$4x^2 + \left(\dfrac{5-4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} - 7 = 0$. Với $0;\dfrac{3}{4}$

$g\left(x\right)=4x^2+\left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7$ Khi đó $g'\left(x\right)=4x\left(4x^2-3\right)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}<0$ với $x\in\left(0;\frac{3}{4}\right)$

Ta có $g\left(\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2};y=2$ là nghiệm duy nhất của hệ.

<u>Bài 50</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(y+1\right)^2+y\sqrt{y^2+1}=x+\frac{3}{2}\\ x+\sqrt{x^2-2x+5}=1+2\sqrt{2x-4y+2}\end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện $2x-4y+2\geq 0$

Phương trình (1) tương đương

$2x-4y+2=\left(y^2+1\right)+2y\sqrt{y^2+1}+y^2\Leftrightarrow 2x-4y+2=\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2$ (*)

Thay vào phương trình (2) ta có

$x-1+\sqrt{\left(x-1\right)^2+1}=2\sqrt{\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2}\Leftrightarrow\frac{x-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}=y+\sqrt{y^2+1}$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$. Khi đó $f'(t)=1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}>0$ suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đơn điệu tăng .

Từ đó suy ra $f\left(\frac{x-1}{2}\right)=f\left(y\right)$ $f\left(\frac{x-1}{2}\right)=f\left(y\right)\Leftrightarrow\frac{x-1}{2}=y\Leftrightarrow x=2y+1$ thay vào phương trinh (*)ta được

$\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{y^2+1}=2-y\\ \sqrt{y^2+1}=-2-y\end{array}\right.\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$

Vậy hệ có nghiệm $\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$

Từ đó suy ra $f\left(\left(x-1\right)^2\right)=f\left(y^2\right)\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2=y^2 \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ y=1-x \end{array}\right.$

Với $y=x-1$ thay vào phuong trình hai ta có

$x^2-\left(x^2-2x+1\right)-3x+3\left(x-1\right)+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{-1}{2}$

Với $y=1-x$ thay vào phương trình hai ta có

$x^2-\left(x^2-2x+1\right)-3x+3\left(1-x\right)+1=0 \; x=\frac{3}{4}\Rightarrow y=\frac{1}{4}$

Bài 52 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2\left(4x+1\right)+2y^2\left(2y+1\right)=y+32 \\ x^2+y^2-x+y=\frac{1}{2} \end{cases}$

Giải

Xét phương trình thứ hai của hệ : $x^2-x+y^2+y-\frac{1}{2}=0$

Phương trình có nghiệm khi $\Delta=1-4y^2-4y+2=3-4y-4y^2\geq 0$

$\Leftrightarrow\frac{-3}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}$

Phương trình thứ hai của hệ biến đổi theo biến y

$y^2+y+x^2-x-\frac{1}{2}=0$

Phương trình có nghiệm khi

$\Delta=1-4x^2+4x+2=3+4x-4x^2\geq 0 \quad\Leftrightarrow\frac{-1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}$

Phương trình thứ nhất ta có

$8x^3+2x^2=-4y^3-2y^2+y+32$

Xét hàm số

$f\left(x\right)=8x^3+2x^2$ Khi đó $f'\left(x\right)=24x^2+4x$ với $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{-1}{6} \end{array}\right.$

Ta có $f\left(0\right)=0;f\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{2};f\left(\frac{-1}{6}\right)=\frac{1}{54};f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{63}{2}$

Xét hàm số

$g\left(y\right)=-4y^3-2y^2+y+32$ khi đó $g'\left(y\right)=-12y^2-4y+1$ với $\left(\;\right)$ $\frac{1}{6}$

Vậy hệ phương trình có hai cặp nghiệm $\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{3}{2};\frac{-1}{2}\right)$

<u>Bài 53</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-2\sqrt{y+1}=3 \\ x^3-4x^2\sqrt{y+1}-9x-8y=-52-4xy \end{cases} \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

<u>Giải</u>

ĐK: $y\ge -1$.

$HPT \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+2\sqrt{y+1} \\ x^3-4x^2\sqrt{y+1}+4xy+4x-13x-8y+52=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3+2\sqrt{y+1} \\ x(x-2\sqrt{y+1})^2-13x-8y+52=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3+2\sqrt{y+1} \\ -x-2y+13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+2\sqrt{y+1} \\ \sqrt{y+1}=5-y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3+2\sqrt{y+1} \\ y\le 5 \\ y^2-11y+24=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3+2\sqrt{y+1} \\ y\le 5 \\ \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm là (7,3).

<u>Bài 54</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2\left(x+y\right)=0 \\ xy\left(x^2+y^2\right)+2=\left(x+y\right)^2 \end{cases} \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

<u>Giải</u>

Biến đổi phương trình thứ hai của hệ ta có

$xy(x+y)^2-2x^2y^2+2=(x+y)^2 \Leftrightarrow (x+y)^2(xy-1)-2(xy-1)(xy+1)=0$

$\Leftrightarrow (xy-1)(x^2+y^2-2)=0$

+) $xy=1$, thay vào phương trình thứ nhất và rút gọn ta được:

$$3x^2y-6xy^2+3y^3=0\Leftrightarrow y(x-y)^2=0.$$

Vì xy = 1 nên $y\neq 0$, do đó x = y. Do đó x = y =1 hoặc x = y = -1.

+) $x^2+y^2=0.$ thay vào phương trình thứ nhất và rút gọn ta được:

$x^3-4x^2y+5xy^2-2y^3=0\Leftrightarrow (x-2y)(x-y)^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=y \end{array}\right.$

Từ đó giải được các nghiệm

$(1;1),(-1,-1),(2\sqrt{\frac{2}{5}};\sqrt{\frac{2}{5}}),(-2\sqrt{\frac{2}{5}};-\sqrt{\frac{2}{5}})$

<u>Bài 55</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+5}=3y+\sqrt{y^2+4} & (1) \\ x^2-y^2-3x+3y+1=0 & (2) \end{cases}\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

<u>Giải</u>

Từ (1): $\dfrac{x^2-y^2-2x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{y^2+4}}=3y-x$, thay (2) vào ta được

$(x-3y)(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{y^2+4}}+1)=0\Leftrightarrow x=3y$

Với x = 3y thay vào (2) giải được: $(x,y)=(\frac{3}{2};\frac{1}{2});(\frac{3}{4};\frac{1}{4})$

<u>Bài 56</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4+y^4+1=25y^2-2x^2 & (1) \\ x^2+y^2+1=y(18-x^2) & (2) \end{cases}$

<u>Giải</u>

Dễ thấy với $y=0$ hệ pt vô nghiệm

Xét $y\neq 0$.Chia (1) cho y^2, chia (2) cho y ta được hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x^4}{y^2}+y^2+\dfrac{1}{y^2}+2\dfrac{x^2}{y^2}=25 \\ \dfrac{x^2}{y}+y+\dfrac{1}{y}+x^2=18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\dfrac{x^2+1}{y}+y)^2-2(x^2+1)=25 \\ \dfrac{x^2+1}{y}+y+x^2=18 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a=\dfrac{x^2+1}{y}+y \\ b=x^2 \end{cases}$ ta được hệ $\begin{cases} a^2-2b=27 \\ a+b=18 \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=7 \\ b=11 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-9 \\ b=27 \end{cases} \end{array}\right.$

+ Với $\begin{cases} a = 7 \\ b = 11 \end{cases}$ ta giải ra được $\begin{cases} x^2 = 11 \\ y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 = 11 \\ y = 4 \end{cases}$

+ Với $\begin{cases} a = -9 \\ b = 27 \end{cases}$ vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm $\begin{cases} x^2 = 11 \\ y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 = 11 \\ y = 4 \end{cases}$

Bài 57 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 8x^3 - y^3 = 65 \\ 2(2+3y)x^2 + (1-3x)y^2 - 4xy = -5. \end{cases}$

Giải

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-y)(4x^2+2xy+y^2) = 65 \\ 4x^2 - 4xy + y^2 + 6x^2y - 3xy^2 = -5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-y)[(2x-y)^2 + 6xy] = 65 \\ (2x-y)[3xy + (2x-y)] = -5. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-y)^3 + 6xy(2x-y) = 65 \\ 2.(2x-y)^2 + 6xy(2x-y) = -10 \end{cases} \Rightarrow (2x-y)^3 - 2(2x-y)^2 + 75 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - y = 5 \\ (2x-y)^2 + 3(2x-y) + 15 = 0 (VN) \end{array}\right.$

Thay y = 2x – 5 vào (1) ta có $8x^3 - (2x-5)^3 = 65 \Leftrightarrow 6x^2 - 15x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; y = -1 \\ x = \frac{1}{2}; y = -4 \end{array}\right.$

Vậy hệ có 2 nghiệm $(2;-1);(\frac{1}{2};-4)$.

Bài 58 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y - x = \sqrt{2(x-1)^2 + 2} \\ 2(y-x) + 1 = \dfrac{1}{x-1} \end{cases}$

Giải

ĐK: $x \neq 1$

Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} 2y - x = \sqrt{2(x-1)^2 + 2} \\ 2y - x - (x-1) = \dfrac{1}{x-1} \end{cases}$$

Đặt

$\begin{cases} a = 2y - x \\ b = x - 1 \end{cases}$. Khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} a=\sqrt{2b^2+2} \\ a-b=\dfrac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2+1=b\sqrt{2b^2+2} \\ a-b=\dfrac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=-1(L) \\ b=1 \end{array}\right. \\ a-b=\dfrac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=2$

Vậy hệ phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=y=2$.

Bài 59 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(xy+1\right)^3=2y^3(9-5xy) \\ xy(5y-1)=1+3y \end{cases}$

Giải

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ

Xét $y\neq 0$ hệ đã cho được biến đổi thành

$$\begin{cases} \left(\dfrac{xy+1}{y}\right)^3=2(9-5xy) \\ x(5y-1)=\dfrac{1+3y}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+\dfrac{1}{y})^3=2(9-5xy) \\ x+\dfrac{1}{y}+3-5xy=0 \end{cases}$$

Đặt $a=x+\dfrac{1}{y},\ b=9-5xy$ ta được hệ $\begin{cases} a^3=2b \\ a+b-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$

Với $\begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$ ta có hệ $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=2 \\ 9-5xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $x=y=1$

Bài 60 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y+1}+1=4\left(x+y\right)^2+\sqrt{3}\sqrt{x+y} \\ 2x-y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Giải

ĐK: $x+y\geq 0$.

$pt(1)\Leftrightarrow \sqrt{x+y+1}-\sqrt{3(x+y)}=4(x+y)^2-1$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+2y-1}{\sqrt{x+y+1}+\sqrt{3(x+y)}}+(2x+2y-1)(2x+2y+1)=0$

$\Leftrightarrow (2x+2y-1)(\dfrac{1}{\sqrt{x+y+1}+\sqrt{3(x+y)}}+2(x+y)+1)=0$

$\Leftrightarrow 2x+2y-1=0$

Từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} 2x+2y-1=0 \\ 2x-y=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ x=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

<u>Bài 61</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^3+(9-y)x^2-3xy=1 \\ x^2+9x-2y=3. \end{cases}$

<u>Giải</u>

$$hpt \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+3x)(3x-y)=1 \\ x^2+3x+2(3x-y)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x=1 \\ 3x-y=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x^2+3x=2 \\ 3x-y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Nếu $\begin{cases} x^2+3x=1 \\ 3x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2} \\ y=\dfrac{-11+3\sqrt{13}}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2} \\ y=\dfrac{-11-3\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

Nếu $\begin{cases} x^2+3x=2 \\ 3x-y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2} \\ y=\dfrac{-10+3\sqrt{17}}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2} \\ y=\dfrac{-10-3\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

<u>Bài 62</u> Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2+3)=3(x^2+y^2)+2 \quad (1) \\ 4\sqrt{x+2}+\sqrt{16-3y}=x^2+8 \quad (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

<u>Giải</u>

ĐK: $x\ge -2, y\le \dfrac{16}{3}$

$(1)\Leftrightarrow (x-1)^3=(y+1)^3 \Leftrightarrow y=x-2$ Thay y = x - 2 vao (2) được

$$4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8 \Leftrightarrow \frac{4(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}=(x-2)(x+2)+\frac{3(x-2)}{\sqrt{22-3x}+4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \dfrac{-4}{\sqrt{x+2}+2}+(x+2)+\dfrac{3}{\sqrt{22-3x}+4}=0(*) \end{array}\right.$$

Xét f(x) = VT(*) trên $\left[-2;\frac{21}{3}\right]$, có f'(x) > 0 nên hàm số đồng biến. suy ra $x=-1$ là nghiệm duy nhất của (*)

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(2;0),(-1;-3)$.

Bài 63 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Giải

Điều kiện: $|x|\geq|y|$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x^2-y^2};\, u\geq 0 \\ v=x+y \end{cases}$; $x=-y$ không thỏa hệ nên xét $x\neq -y$ ta có $y=\frac{1}{2}\left(v-\frac{u^2}{v}\right)$.

Hệ phương trình đã cho có dạng:

$$\begin{cases} u+v=12 \\ \frac{u}{2}\left(v-\frac{u^2}{v}\right)=12 \end{cases}$$

Đến đây sử dụng phương pháp rút thế ta dễ dàng tìm ra kết quả bài toán.

Bài 64 Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x-y\right)^2+x+y=y^2 \\ x^4-4x^2y+3x^2=-y^2 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Giải

Hệ tương đương $\begin{cases} x^2+y+x(1-2y)=0 & (1) \\ (x^2+y)^2+3x^2(1-2y)=0 & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) được $\left(x(1-2y)\right)^2+3x^2(1-2y)=0 \Leftrightarrow 2x^2(1-2y)(2-y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=\frac{1}{2} \\ y=2 \end{array}\right.$

Với x = 0 suy ra y = 0

Với $1-2y=0$ thay vào (1) suy ra $x^2=-y=\frac{-1}{2}$ (Vô lí)

Với y = 2 suy ra x = 1 hoặc x = 2

Hệ có 3 nghiệm (0; 0), (1; 2), (2; 2).

Bài 65 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-5y+3+6\sqrt{y^2-7x+4}=0 \\ y(y-x+2)=3x+3 \end{cases}$ $(x,y\in R)$. $(x,y\in\mathbb{R})$

Giải

Phương trình thứ (2) $\Leftrightarrow y^2+(2-x)y-3x-3=0$ được xem là phương trình bậc hai theo ẩn y có

$\Delta = (x+4)^2$

Phương trình có hai nghiệm: $\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{x-2-x-4}{2} = -3 \\ y = \dfrac{x-2+x+4}{2} = x+1 \end{array}\right.$ Thay y = -3 vào pt thứ nhất ta được pt vô nghiệm

Thay $y = x+1$ vào pt thứ nhất ta được: $x^2 - 5x - 2 + 6\sqrt{x^2-5x+5} = 0$ (3)

Giải (3): đặt $\sqrt{x^2-5x+5} = t$, điều kiện $t \geq 0$ $\quad (3) \Leftrightarrow t^2 + 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \quad (tm) \\ t = -7 \quad (ktm) \end{array}\right.$

Với t=1 $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-5x+5} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 4 \Rightarrow y = 5 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy, hệ phương trình có 2 nghiệm là: $(1;2)$ và (4;5)

<u>Bài 66</u> Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y - 2x^2 - 2y^2 + 5y - 2 = 0 \\ \sqrt{y^2+1} + \sqrt{x-y} = 2xy - x^2 + \sqrt{x^2-2xy+y^2+1} + \sqrt{y} \end{cases}$

$(x, y \in R)$.

<u>Giải</u>

Từ phương trình (2) ta có đ/k : $x \geq y, y \geq 0$ $\sqrt{y^2+1} - \sqrt{y} - y^2 = \sqrt{(x-y)^2+1} - \sqrt{x-y} - (x-y)^2$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2+1} - \sqrt{t} - t^2$ liên tuc $[0;+\infty)$ có $f'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}} - \dfrac{1}{.2\sqrt{t}} - 2t$

$= t\left(\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} - 2\right) - \dfrac{1}{2\sqrt{t}} < 0 \ \forall t > 0$ Suy ra hàm số nghịch biến $(0;+\infty)$ nên

$f(y) = f(x-y) \Leftrightarrow x = 2y$

Thay vào (1) ta có $(y-2)(x^2-x+1) = 0 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 4$. Vậy hệ có nghiệm (x ;y) = (4 ; 2).

<u>Bài 67</u> Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x-1} + 4(2x+1) = \sqrt{y-1} + 3y \\ (x+y)(2x-y) + 4 = -6x - 3y \end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện: $\dfrac{1}{3}$; $\quad$ 1

$2x-y+4=0 \Leftrightarrow y=2x+4$, thay vào (1) ta có: $\sqrt{3x-1}+4(2x+1)=\sqrt{2x+3}+3(2x+4)$
$\Leftrightarrow 2(3x-1)+\sqrt{3x-1}=2(2x+3)+\sqrt{2x+3} \quad (*)$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{3x-1}=\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow y=12$ .Kết luận: $(x,y)=(4;12)$.

Bài 68 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ \dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\dfrac{31}{7} \end{cases}$

Giải

Điều kiện của phương trình $x \neq -y$

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ \dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\dfrac{31}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2=3 & (1) \\ 7(x^5+y^5)=31(x^3+y^3) & (2) \end{cases}$$

Lấy (2) nhân 3 kết hợp với (1) ta được phương trình đồng bậc

$21(x^5+y^5)=31(x^2+xy+y^2)(x^3+y^3) \Leftrightarrow 10x^5+31x^4y+31x^3y^2+31xy^4+10y^4=0 \quad (3)$.

Rõ ràng $x=y=0$ không phải là nghiệm hệ phương trình. Đặt $x=ty$ thay vào (3) ta được:

$y^5(10t^5+31t^4+31t^3+31t+10)=0 \quad \Leftrightarrow 10t^5+31t^4+31t^3+31t+10=0$

$\Leftrightarrow (t+1)(10t^4+21t^3+10t^2+21t+10)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+1=0 \\ 10t^4+21t^3+10t^2+21t+10=0 \end{array}\right.$

Với $t+1=0 \Leftrightarrow t=-1$ hay $x=-y \Leftrightarrow x+y=0$ (loại).

Với $10t^4+21t^3+10t^2+21t+10=0 \quad (3)$. Vì $t=0$ không phải là nghiệm của phương trình (3) chia hai vế phương trình cho t^2 ta được: $10\left(t^2+\dfrac{1}{t^2}\right)+21\left(t+\dfrac{1}{t}\right)+10=0$,

Đặt $u=t+\dfrac{1}{t} \Rightarrow |u| \geq 2;\ u^2=t^2+\dfrac{1}{t^2}+2 \Rightarrow t^2+\dfrac{1}{t^2}=u^2-2$. Khi đó (3) trở thành

$10u^2+21u-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\dfrac{2}{5} loai \\ u=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$

Với $u=-\dfrac{5}{2}$ ta có $t+\dfrac{1}{t}=-\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 2t^2+5t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Với $t=-2$ ta có $x=-2y$ thế vào (1) ta có $3y^2=3 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1$ tương ứng $x=\mp 2$.

Với $\quad \dfrac{1}{2}$

Bài 69 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3y - y^4 = 7 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 9 \end{cases}$

Giải

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} y\left(x^3 - y^3\right) = 7 \quad (1) \\ y\left(x + y\right)^2 = 9 \quad (2) \end{cases}$

Từ hệ suy ra $x.y \neq 0;\ x \neq \pm y,\ y > 0$.

Lấy phương trình (1) lũy thừa ba, phương trình (2) lũy thừa bốn. Lấy hai phương trình thu được chia cho nhau ta thu được phương trình đồng bậc: $\dfrac{y^3\left(x^3 - y^3\right)^3}{y^4\left(x + y\right)^8} = \dfrac{7^3}{9^4}$.

Đặt $x = ty$ ta được phương trình: $\dfrac{\left(t^3 - 1\right)^3}{\left(t + 1\right)^8} = \dfrac{7^3}{9^4} \quad (3)$. Từ phương trình này suy ra $t > 1$.

Xét $f\left(t\right) = \dfrac{\left(t^3 - 1\right)^3}{\left(t + 1\right)^8};\ \forall t > 1$.

$$f'\left(t\right) = \frac{9t^2\left(t^3 - 1\right)^2\left(t + 1\right)^8 - 8\left(t + 1\right)^7\left(t^3 - 1\right)^3}{\left(t + 1\right)^8} = \frac{\left(t^3 - 1\right)^2\left(t + 1\right)^7\left(9t^3 + 9t^2 - 8t^3 + 8\right)}{\left(t + 1\right)^8}$$

$$= \frac{\left(t^3 - 1\right)^2\left(t + 1\right)^7\left(t^3 + 9t^2 + 8\right)}{\left(t + 1\right)^8} > 0\ \forall t > 1$$

Vậy f(t) đồng biến với mọi $t > 1$. Nhận thấy $t = 2$ là nghiệm của (3). Vậy $t = 2$ là nghiệm duy nhất.

Với $t = 2$ ta có $x = 2y$ thế vào (1) ta được $y^4 = 1 \Leftrightarrow y = 1$ (vì $y > 0$) suy ra $x = 2$.

Vậy hệ có nghiệm là $\left(2;1\right)$.

Bài 70 Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{y}} = 2 \quad (1) \\ \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{x}} = 2 \quad (2) \end{cases}$

ĐK: $x \geq \dfrac{1}{2}, y \geq \dfrac{1}{2}$.

Trừ vế hai pt ta được $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{y}} - \sqrt{2 - \dfrac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}+\frac{2-\frac{1}{y}-\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2-\frac{1}{y}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}}=0\Leftrightarrow\frac{y-x}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}+\frac{y-x}{xy\left(\sqrt{2-\frac{1}{y}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)}=0$$

❖ **TH 1**. $y-x=0\Leftrightarrow y=x$ thế vào (1) ta được $\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}=2$

Đặt $t=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $t>0$ ta được

$$\sqrt{2-t^2}=2-t\Leftrightarrow\begin{cases}2-t\geq 0\\2-t^2=4-4t+t^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\leq 2\\t^2-2t+1=0\end{cases}\Leftrightarrow t=1\Rightarrow x=1 \text{ và } y=1$$

❖ **TH 2**. $\frac{1}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}+\frac{1}{xy\left(\sqrt{2-\frac{1}{y}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)}=0$. TH này vô nghiệm do ĐK.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (1; 1).

Bài 71 Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+2y^2+2=\frac{8}{y}\\3x^2+3y^2+5=8\left(\frac{2}{y}+\frac{1}{x}\right)\end{cases}$

Điều kiện: $x.y\neq 0$

Quy đồng rồi thế (1) vào (2), ta được:

$3x^3y+3xy^3+5xy=2x\left(x^2y+2y^2+2y\right)+y\left(x^2y+2y^2+2y\right)$

$\Leftrightarrow\left(x-2y\right)\left(x^2+xy+y^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=2y$ thay vào (1), ta được:

$4y^3+2y^2+2y-8=0\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=2$

KL: $S=\left\{\left(2;1\right)\right\}$.

Bài 72 Giải hệ phương trình: $\begin{cases}y^6+y^3+2x^2=\sqrt{xy-x^2y^2}\\8xy^3+2y^3+1\geq 4x^2+2\sqrt{1+(2x-y)^2}\end{cases}$

Giải

$$VP(1)=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(xy-\frac{1}{2}\right)^2}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow VT(1)=y^6+y^3+2x^2\leq\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2y^6+2y^3+4x^2\leq 1 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra:

$8xy^3+2y^3+2\ge 2y^6+2y^3+4x^2+4x^2+2\sqrt{1+(2x-y)^2}$

$\Leftrightarrow 8xy^3+2\ge 2y^6+8x^2+2\sqrt{1+(2x-y)^2}$

$\Leftrightarrow 4xy^3+1\ge y^6+4x^2+\sqrt{1+(2x-y)^2}$

$\Leftrightarrow 1-\sqrt{1+(2x-y)^2}\ge y^6-4xy^3+4x^2=(y^3-2x)^2 \qquad (4)$

$VT(4)\le 0, VP(4)\ge 0$. Do đó:

$$(4)\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x\\ y^3=2x\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x\\ y^3=y\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=0\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases} x=\frac{1}{2}\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases} x=-\frac{1}{2}\\ y=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

Thử lại chỉ có: $(x;y)=(-\frac{1}{2};-1)$ thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-\frac{1}{2};-1)$.

Bài 73 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}+x}+y^2=0 & (1)\\ \dfrac{x^2}{y^2}+2\sqrt{x^2+1}+y^2=3 & (2)\end{cases}$

Giải

Từ PT (1) ta có: $x+y(\sqrt{x^2+1}-x)+y^2=0$ do $y\ne 0$

$\Leftrightarrow \frac{x}{y}+y+\sqrt{x^2+1}-x=0 \qquad (3)$

Từ (2) & (3) ta có: $\left(\frac{x}{y}+y\right)^2-2\left(\frac{x}{y}+y\right)-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x}{y}+y=-1\\ \frac{x}{y}+y=3\end{array}\right.$

Thay vào (3) giải ra ta có nghiệm $(0;-1)$

Bài 74 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x-2y+\sqrt{2x+y+2xy+1}=1\\ \sqrt[3]{3y+1}=8x^3-2y-1\\ x>0\end{cases}$

Giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow \left(2x+1\right)-2\left(y+1\right)+\sqrt{\left(2x+1\right)\left(y+1\right)}=0$

ĐK: (2x + 1)(y + 1) $\geq$ 0

Mà x > 0 $\Rightarrow \begin{cases} 2x+1>0 \\ y+1\geq 0 \end{cases}$

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{y+1}\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\sqrt{y+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}-\sqrt{y+1}=0$

$\Leftrightarrow y=2x$

Thay vào (2): $\sqrt[3]{6x+1}=8x^3-4x-1$

$\Leftrightarrow \left(6x+1\right)+\sqrt[3]{6x+1}=\left(2x\right)^3+2x \qquad (3)$

Hàm số f(t) = t^3 + t đồng biến trên R

(3) $\Leftrightarrow \sqrt[3]{6x+1}=2x \quad \Leftrightarrow 4x^3-3x=\dfrac{1}{2}$

Nhận xét: x >1 không là nghiệm của phương trình

Xét 0$< x \leq 1$: Đặt x = cosα với $0\leq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos 3\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha=\dfrac{\pi}{9}+k\dfrac{2\pi}{3} \\ \alpha=-\dfrac{\pi}{9}+k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.$ (k$\in Z$)

Do $0\leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{9}$

Vậy hệ có nghiệm: $\left(\cos\dfrac{\pi}{9};2\cos\dfrac{\pi}{9}\right)$

Bài 75 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x+y\right)^4+3=4\left(x+y\right) \\ \dfrac{x^4-y^4}{64}+\dfrac{9\left(x^2-y^2\right)}{32}+\dfrac{7\left(x-y\right)}{8}+3\ln\left(\dfrac{x-3}{y-3}\right)=0 \end{cases}$

Giải

Theo BĐT Cauchy ta có $(\quad)$ $\sqrt{(\quad)}$ $|\quad|$ $(\quad)$

Xét hàm số f(x) = $\frac{x^4}{64}+\frac{9x^2}{32}+\frac{7x}{8}+3\ln\left(3-x\right)$ (với x < 3)

$$f'\left(x\right)=\frac{x^3}{16}+\frac{9x}{16}+\frac{7}{8}+\frac{3}{x-3}=\frac{\left(x^3+9x+14\right)\left(x-3\right)+48}{16(x-3)}$$

$$=\frac{x^4-3x^3+9x^2-13x+6}{16(x-3)}=\frac{\left(x-1\right)^2\left(x^2-x+6\right)}{16(x-3)}\le 0 \quad \text{(vì x < 3).}$$

Suy hàm số nghịch biến trên (-2; 3), vậy f(x) = f(y) $\Leftrightarrow x=y$ (**).

Từ (*), (**) có x = y = $\frac{1}{2}$.

<u>Bài 76</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2-2\right)=6\ln\left(\dfrac{y+\sqrt{y^2+9}}{x+\sqrt{x^2+9}}\right)\\ x^5y-3xy-1=0\end{cases}$

<u>Giải</u>

Từ $\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2-2\right)=6\ln\left(\dfrac{y+\sqrt{y^2+9}}{x+\sqrt{x^2+9}}\right)$

$$\Leftrightarrow x^3-2x+6\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)=y^3-2y+6\ln\left(y+\sqrt{y^2+9}\right) \qquad \left(1\right)$$

Xét $f\left(t\right)=t^3-2t+6\ln\left(t+\sqrt{t^2+9}\right) \quad t\in\mathbb{R}$

$$f'\left(t\right)=3t^2-2+\frac{6}{\sqrt{t^2+9}}=3\left(t^2+\frac{2}{\sqrt{t^2+9}}-\frac{2}{3}\right)$$

Ta có $t^2+\frac{2}{\sqrt{t^2+9}}-\frac{2}{3}=t^2+9+\frac{2}{\sqrt{t^2+9}}-\frac{29}{3}=\frac{t^2+9}{27}+\frac{1}{\sqrt{t^2+9}}+\frac{1}{\sqrt{t^2+9}}+\frac{26}{27}\left(t^2+9\right)-\frac{29}{3}$

$$-\left(\quad\right)$$

u		-1		0		1		2	
g'(u)	+	0	-		-	0	+		
g(u)				-1	↘	-∞	↗	1	+∞

Căn cứ vào BBT phương trình (3) có nghiệm duy nhất thuộc (0; 2)

Đặt $u = 2\cos\alpha$ với $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó (3) trở thành: $\cos 3\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{9} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}$

Vậy hệ có nghiệm $\left(\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}; \sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}\right)$; $\left(-\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}; -\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}\right)$

<u>Bài 77</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{x^2+y} + 2^{x+y^2} = 8 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$

<u>Giải</u>

Ta có: $\begin{cases} x + y \ge \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = 2 \\ x^2 + y^2 \ge \frac{1}{2}\left(x + y\right)^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + x + y \ge 4$

Theo BĐT Cauchy ta có: $2^{x^2+y} + 2^{y^2+x} \ge 2\sqrt{2^{x^2+y^2+x+y}} \ge 2.\sqrt{2^4} = 8$

PT $\Leftrightarrow$ dấu " = " xảy ra. Từ đó ta có x = y = 1.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (1; 1).

<u>Bài 78</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 8y^3 = 2xy(1 - 2y) \\ \sqrt{x^3 + 4x} = 1 + \frac{\left(2y + 1\right)^2}{3} \end{cases}$

<u>Giải</u>

ĐK: từ PT (2) ,suy ra x> 0

Ta có PT (1)$\Leftrightarrow x(x - 2y) = 4y^2(2y - x) \Leftrightarrow (x - 2y)(x + 4y^2) = 0 \Leftrightarrow x = 2y$ (vì $x+4y^2 > 0$)

Thay vào phương trình (2) có $3\sqrt{x^3 + 4x} = x^2 + 2x + 4$ (*)

Ap dụng bất dẳng thức Cauchy tacó

$\frac{x^2 + 4}{4} \ge x \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = \frac{x^2 + 4}{4} + \frac{3}{4}(x^2 + 4) + 2x \ge x + \frac{3}{4}(x^2 + 4x) + 2x =$

$= \frac{3}{2}(\frac{x^2 + 4}{2} + 2x) \ge \frac{3}{2}.2\sqrt{x^3 + 4x} = 3\sqrt{x^3 + 4x}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi x = 2. Hệ phương trình có nghiệm (2,1)

(*Chú ý :Cách khác : Bình phương 2 vế của pt (*)* $\Leftrightarrow (x-2)^2(x^2-x+4)=0$ *)*

Bài 79 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy^2+4y^2+8=x(x+2) \\ x+y+3=3\sqrt{2y-1} \end{cases}$ $(x,y\in R)$

Giải

$(1)\Leftrightarrow (x+4)(y^2-x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=y^2+2 \end{array}\right.$

Với $x=-4$ thay vào pt (2) ta được $y=10+3\sqrt{10}$

Với $x=y^2+2$ thế vào pt (2) ta được $y^2+y+5=3\sqrt{2y-1}$ (*)

Ta có $y^2+y+5=2y-1+(y^2-y+1)+5>2y-1+5\ge 2\sqrt{5(2y-1)}\ge 3\sqrt{2y-1}$

Do đó pt (*) vô nghiệm.

KL: Nghiệm của hệ $x=-4$, $y=10+3\sqrt{10}$.

Bài 80 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-8x=y^3+2y \\ x^2-3=3(y^2+1) \end{cases}$

Giải

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^3=2(4x+y)(1) \\ x^2-3y^2=6(2) \end{cases}$

$\Rightarrow x^3+x^2y-12xy^2=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3y \\ x=-4y \end{array}\right.$

Thay cả 3 trường hợp x vào (2) $\Rightarrow$ Hệ có các nghiệm là:

$(3;1)$, $(-3;\ -1)$, $(-4\sqrt{\frac{6}{13}};\sqrt{\frac{6}{13}}),(4\sqrt{\frac{6}{13}};-\sqrt{\frac{6}{13}})$

Bài 81 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 8(x+y)-3xy=2y^2+x^2 \\ 4\sqrt{2-x}+\sqrt{3-y}=2x^2-y^2+5 \end{cases}$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x\le 2 \\ y\le 3 \end{cases}$, phương trình $(1)\Leftrightarrow (x+y)(x+2y-8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ x+2y=8 \end{array}\right.$.

Với $x+2y=8$

Ta có : $\begin{cases} x\le 2 \\ y\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ 2y\le 6 \end{cases} \Rightarrow x+2y\le 8$

Khi đó: $x+2y=8 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ không thỏa hệ.

Với $x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$ thay vào phương trình (2)

Ta có PT $(2) \Leftrightarrow 4\sqrt{2-x}+\sqrt{3+x}=x^2+5$

Điều kiện: $-3 \le x \le 2$

Ta có $(2) \Leftrightarrow 4\left(\sqrt{2-x}-1\right)+\left(\sqrt{3+x}-2\right)=x^2-1 \Leftrightarrow 4\dfrac{1-x}{\sqrt{2-x}+1}+\dfrac{x-1}{\sqrt{3+x}+2}=\left(x-1\right)\left(x+1\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=-1 \\ \dfrac{4}{\sqrt{2-x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{3+x}+2}+x+1=0 \ (*) \end{array}\right.$$

Xét phương trình (*), đặt $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{3+x}+2}+x+1$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2-x}\left(\sqrt{2-x}+1\right)^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{3+x}\left(\sqrt{3+x}+2\right)^2}+1>0; \forall x \in \left(-3;2\right)$

Mặt khác $f(x)$ liên tục trên $\left[-3;2\right]$, suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\left[-3;2\right]$.

Ta có: $f(-2)=0$, suy ra (*) có nghiệm duy nhất $x=-2 \Rightarrow y=2$.

Kết hợp điều kiện, hệ có hai nghiệm $\left(1;-1\right),\left(-2;2\right)$.

<u>Bài 82</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3(y^2+y)(1+\sqrt{x-2})=x+2\sqrt{x-2}+1 \\ 2y^2+2y+\sqrt{x-2}=2 \end{cases}$

<u>Giải</u>

ĐK: $x \ge 2$. Ta có

$$\begin{cases} 3(y^2+y)(1+\sqrt{x-2})=x+2\sqrt{x-2}+1 \\ 2y^2+2y+\sqrt{x-2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(y^2+y)(1+\sqrt{x-2})=(x-2+2\sqrt{x-2}+1)+2 \\ 2(y^2+y)+1+\sqrt{x-2}=3 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a=y^2+y \\ b=1+\sqrt{x-2} \end{cases}$ ta được $\begin{cases} 3ab=b^2+2 \\ 2a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3-2a \\ 10a^2-21a+11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=1 \\ a=\dfrac{11}{10}, b=\dfrac{4}{5} \end{array}\right.$

Với *a*=*b*=*1* suy ra hệ có hai nghiệm là : $\left[\begin{array}{l} x=2, y=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x=2, y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ Vì $b=1+\sqrt{x-2} \ge 1 \Rightarrow b=\dfrac{4}{5}$ không

<u>Bài 83</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x-2y+\sqrt{\left(2x+1\right)\left(y+1\right)}=1 \\ \sqrt[3]{3y+2}=8x^3-2y-2 \end{cases}$, với $x \ge 0$ và $x,y \in R$.

<u>Giải</u>

Điều kiện: $(2x+1)(y+1)\ge 0$,

Phương trình $(1)\Leftrightarrow\left(2x+1\right)-2\left(y+1\right)+\sqrt{\left(2x+1\right)\left(y+1\right)}=0$. Từ giả thiết $x\ge 0$ ta có $2x+1>0\Rightarrow y+1\ge 0$. Đặt $a=\sqrt{2x+1}, b=\sqrt{y+1}$ ta có (1) trở thành: $a^2-2b^2+ab=0$

$$\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)+\left(ab-b^2\right)=0\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left(a+2b\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\ a+2b=0(l)\end{array}\right.$$

Với $a=b$ ta có: $2x+1=y+1\Leftrightarrow y=2x$ thay vào phương trình (2) ta có:

$\sqrt[3]{6x+2}=8x^3-4x-2\Leftrightarrow\left(6x+2\right)+\sqrt[3]{6x+2}=\left(2x\right)^3+2x$, (*).

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ ta có $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in R\Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên R

Do đó $PT(*)\Leftrightarrow\sqrt[3]{6x+2}=2x\Leftrightarrow 8x^3-6x-2=0$

$\Leftrightarrow 2(x-1)(4x^2+4x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\quad(n)\\ x=-\dfrac{1}{2}(l)\end{array}\right.$. Với $x=1\Rightarrow y=2$

<u>Bài 84</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}5x^5y-4xy^2+3y^3-2\left(x+y\right)=0\left(1\right)\\ xy\left(^2+y^2\right)+2=\left(x+y\right)^2\qquad\left(2\right)\end{cases}$.

<u>Giải</u>

Từ (2) ta có : $\left(xy-1\right)\left(x^2+y^2-2\right)=0\Rightarrow xy=1\vee x^2+y^2=2$

- Với xy = 1; từ (1) suy ra : $y^4-2y^2+1=0\Leftrightarrow y=\pm 1$. Vậy hệ có nghiệm (x;y)=(1;1),(-1;-1).
- Với : $x^2+y^2=2\Rightarrow\left(1\right)\Leftrightarrow 3y\left(x^2+y^2\right)-4xy^2+2x^2y-2\left(x+y\right)=0$

$\Leftrightarrow 6y-4xy^2+2x^2y-2\left(x+y\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(1-xy\right)\left(2y-x\right)=0\rightarrow xy=1\vee x=2y$

Xét : xy = 1 . Đã giải ở trên

Với : x = 2y , thay vào $x^2+y^2=2\Rightarrow\left(x;y\right)=\left(\dfrac{2\sqrt{10}}{5};\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right),\left(-\dfrac{2\sqrt{10}}{5};-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$

Vậy hệ có nghiệm : (x;y)=(1;1),(-1;-1), $\underline{2\sqrt{10}}$ $\underline{\sqrt{10}}$ $\underline{2\sqrt{10}}$ $\underline{\sqrt{10}}$

$$\Leftrightarrow \frac{4(y-1)(9y+1)y^2}{(y+1)^2} = y-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ 4(9y+1)y^2 = (y+1)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \to x = \pm\sqrt{2} \\ y = \dfrac{1}{3} \to x = 0 \end{array}\right.$$

<u>Bài 86</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y + 2y + x = 4xy \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{xy} + \dfrac{x}{y} = 3 \end{cases}$.

<u>Giải</u>

Điều kiện : $x \neq 0, y \neq 0$. Chia hai vế phương trình (1) cho xy , thêm 1 vào hai vế của phương trình (2) và nhóm chuyển về dạng tích $\Rightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 4 \\ \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = 4 \end{cases}$

Đặt : $u = x + \dfrac{1}{x}; v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \Rightarrow \begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 4$.

Đến đậy bài toán trở thành đơn giản.

<u>Bài 87</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y \\ y + \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x \end{cases}$.

<u>Giải</u>

Cộng hai vế phương trình của hệ vế với vế ta có :

$\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} + \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = x^2 + y^2$. Ta có : x = y = 0 là một nghiệm của hệ .

Ta có : $\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9} = \sqrt[3]{(x-1)^2 + 8} \geq 2 \Rightarrow VT \leq xy + xy = 2xy$. Khi đó : $VP = x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Cho nên dấu bằng chỉ xảy ra khi : x = y = 1. Vậy hệ có hai nghiệm : (x; y)=(0;0); (1;1).

<u>Bài 88</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 1 + y^7 \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4) = 1 + x^7 \end{cases}$.

<u>Giải</u>

Dễ thấy : x = y = 0 hoặc x = y = -1 là nghiệm của hệ

Xét : x > 0

Ta có: $1 + y^7 = (1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 > 1 + x^7 \Rightarrow y > x$

Ta có: $1 + x^7 = (1+y)(1+y^2)(1+y^4) = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 > 1 + y^7 \Rightarrow x > y$

Vậy hệ vô nghiệm . Tương tự khi y>0 hệ cũng vô nghiệm

Xét : x < -1 $\Rightarrow 1 + x^7 < 0 \Rightarrow y < -1$

Ta có : 1+$(x + x^2) + (x^3 + x^4) + (x^5 + x^6) + x^7 > 1 + x^7 \Rightarrow y > x$. Tương tự khi $y < -1$ ta có $x > y$

Hệ cũng vô nghiệm

Xét trường hợp $-1 < x < 0$. Hệ cũng vô nghiệm .

Kết luận : Hệ có nghiệm : $(x;y) = (0;0);(-1;-1)$.

Bài 89 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3x}(1+\dfrac{1}{x+y}) = 2 & (1) \\ \sqrt{7y}(1-\dfrac{1}{x+y}) = 4\sqrt{2} & (2) \end{cases}$.

Giải

ĐK $x \ge 0, y \ge 0$. Dễ thấy $x = 0$ hoặc $y = 0$ không thõa mãn hệ. Với x > 0, y > 0 ta có :

$\begin{cases} 1+\dfrac{1}{x+y} = \dfrac{2}{\sqrt{3x}} \\ 1-\dfrac{1}{x+y} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{1}{\sqrt{3x}} + \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \\ \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{\sqrt{3x}} - \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{3x} - \dfrac{8}{7y}$ (nhân vế với vế)

$\Rightarrow 21xy = (7y-24x)(x+y) \Rightarrow 24x^2 + 38xy - 7y^2 = 0 \Rightarrow y = 6x$ (vì *x, y* dương).

Thay vào phương trình (1) ta được $\dfrac{1}{7x} - \dfrac{2}{\sqrt{3}}.\dfrac{1}{\sqrt{x}} + 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 7\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} \pm \dfrac{2}{\sqrt{21}}\right)$.

Từ đó dễ dàng suy ra *x* và *y*.

Bài 90 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 & (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x & (2) \end{cases}$.

Giải

Với hệ này, cả hai ẩn và ở hai phương trình đều khó có thể rút ẩn này theo ẩn kia. Tuy nhiên, nếu rút y^2 từ (2) và thế vào (1) thì ta được một phương trình mà ẩn *y* chỉ có bậc 1:

$x^3 + 3x(-x^2 + 8xy + 8y - 17x) = -49 \Leftrightarrow 24xy(x+1) = 2x^3 + 2x^2 + 49x^2 - 49 \quad (3)$

Nếu *x*=0 thì (1) vô lí.

Nếu *x*=-1 thì hệ trở thành $y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$.

Nếu $x \ne -1 \;\&\; x \ne 0$ thì từ (3) suy ra $y = \dfrac{2x^2 + 49x - 49}{24x}$. Thế trở lại phương trình (2) ta được

$$x^2 - 8x.\frac{2x^2+49x-49}{24x} + \left(\frac{2x^2+49x-49}{24x}\right)^2 = \frac{2x^2+49x-49}{3x} - 17x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \left(\frac{2x^2+49x-49}{24x}\right)^2 = \frac{-49}{3x} \Leftrightarrow 192x^4 + (2x^2+49x-49)^2 = -49.192x$$

$$\Leftrightarrow 196x^4 + 196x^3 + 2205x^2 + 4606x + 2401 = 0 \Leftrightarrow 196x^3 + 2205x + 2401 = 0$$

$$\Leftrightarrow 196x^3 + 196 + 2205x + 2205 = 0 \Leftrightarrow 196x^2 - 196x + 2401 = 0$$

Phương trình cuối cùng vô nghiệm, chứng tỏ hệ chỉ có hai nghiệm (-1;4) và (-1;-4).

Bài 91 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 & (1) \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 & (2) \end{cases}$.

Giải

ĐK: $x \geq -\frac{5}{4}$. Nếu $y = 0$ thì từ phương trình (1) ta suy ra $x = 0$, thế vào phương trình (2) ta thấy không thỏa mãn, vậy y khác 0.

Đặt $x = ky$ ta được (1) trở thành :

$k^5y^5 + ky^5 = y^{10} + y^6 \Leftrightarrow k^5 + k = y^5 + y$ (3). Xét hàm số $f(t) = t^5 + t$ trên $\mathbb{R}$, ta có

$f'(t) = 5t^4 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó *f(t)* là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, vậy

(3) $\Leftrightarrow f(k) = f(y) \Leftrightarrow k = y \Rightarrow x = y^2$. Thế vào (2) ta được

$$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6 \Leftrightarrow 5x + 13 + 2\sqrt{4x^2+37x+40} = 36 \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2+37x+40} = 23 - 5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 23 - 5x \geq 0 \\ 16x^2 + 148x + 160 = 25x^2 - 230x + 529 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \leq 23 \\ 9x^2 - 378x + 369 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 41 \end{array}\right.$$

Suy ra $x = 1$ và do đó $y = \pm 1$.

Bài 92 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt[4]{y^2 - 2y + 2} = 2 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{y+3} = 3 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 2x + 2 \geq 0 \\ y^2 - 2y + 2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -3 \end{cases}$

Mà: $\begin{cases} x^2 - 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geq 1 \\ y^2 - 2y + 2 = (y-1)^2 + 1 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq 1 \\ \sqrt[4]{y^2 - 2y + 2} \geq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt[4]{y^2 - 2y + 2} \geq 2$

Vậy (1) có nghiệm x = y = 1 thỏa (2).

Bài 93 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y - 2x^2 - 2y^2 + 5y - 2 = 0 \\ \sqrt{y^2+1} + \sqrt{x-y} = 2xy - x^2 + \sqrt{x^2 - 2xy + y^2 + 1} + \sqrt{y} \end{cases}$.

Giải

ĐK: $x - y \geq 0; y \geq 0 \Leftrightarrow x \geq y \geq 0$

Từ (2) : $\sqrt{y^2+1} + \sqrt{x-y} - y^2 = -y^2 + 2xy - x^2 + \sqrt{(x-y)^2 + 1} + \sqrt{y} \Leftrightarrow$

$\sqrt{y^2+1} - \sqrt{y} - y^2 = +\sqrt{(x-y)^2+1} - \sqrt{x-y} - (x-y)^2$

Xét hàm số :

$$f(t) = \sqrt{t^2+1} - \sqrt{t} - t^2 \quad (t \geq 0) \Rightarrow f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} - 2t = t\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} - 2\right) - \frac{1}{2\sqrt{t}} < 0$$

(Vì : $\sqrt{t^2+1} \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} - 2 < 0$ với mọi t>0)

Như vậy hệ có nghiệm chỉ xảy ra khi : $y = x - y$ hay x = 2y .

Thay vào (1) : $(2y)^2 y - 2(2y)^2 - 2y^2 + 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow 4y^3 - 10y^2 + 5y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (y-2)(4y^2 - 2y + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 2$ vì : $4y^2 - 2y + 1 = 0$ vô nghiệm .

Vậy hệ có nghiệm : (x; y) = (4; 2).

Bài 94 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{x^2+1} - 4^{8y^2+\frac{1}{2}} = 3\left(2\sqrt{y} - \sqrt{x}\right) (1) \\ 2^{(x+y)^2} + \dfrac{3}{2}\sqrt{x+y} = \dfrac{7}{2} \qquad (2) \end{cases}$.

Giải

Điều kiện : $x, y \geq 0$

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow 2.2^{(\sqrt{x})^4} + 3\sqrt{x} = 2.2^{(2\sqrt{y})^4} + 3\left(2\sqrt{y}\right)$

Xét hàm số : $f(t) = 2.t^4 + 3t\,(t \geq 0) \Rightarrow f'(t) = 8t^3 + 3 > 0$. Chứng tỏ f(t) luôn đồng biến .

Do vậy để phương trình (1) có nghiệm chỉ khi : $\sqrt{x} = 2\sqrt{y} \Leftrightarrow x = 4y \quad (*)$

Thay vào (2) : $2^{(\sqrt{5y})^4} + \dfrac{3}{2}\left(\sqrt{5y}\right) = \dfrac{7}{2}$. Xét hàm số : f(t)=$2^{t^4} + \dfrac{3}{2}t \Rightarrow f'(t) = 4t^3.2^{t^4} + \dfrac{3}{2} > 0$.

Nhận xét : f(1) = 2 + $\dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{2}$. Suy ra t = 1 là nghiệm duy nhất .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ \sqrt{5y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{5} \\ x = \dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$$

Bài 95 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x + \sqrt{x^2+4}\right)\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 2 \qquad (1) \\ 27x^6 = x^3 - 8y + 2 \qquad (2) \end{cases}$

Giải

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+4} = \sqrt{(-2y)^2 + 4} + (-2y)$

Hàm số $f(t) = \sqrt{t^2+4} + t$ đồng biến trên R nên $(1) \Leftrightarrow x = -2y$

Thế vào PT (2) ta có:

$$27x^6 = x^3 + 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = \sqrt[3]{x^3 + 4x + 3}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = x^3 + 4x + 3 + \sqrt[3]{x^3 + 4x + 3} \qquad (3)$$

Lại xét : $g(t) = t^3 + t$, đồng biến trên R nên:

$$\left(3\right) \Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{x^3+4\text{x}+2}$$
$$\Leftrightarrow 3\text{x}^2-x-1=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$$

Bài 96 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{2y^2+1}+y=4+\sqrt{x+4} \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$

Giải

Điều kiện: $-4\le x\le 1; y\in\mathbb{R}$.

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow 2y^3+y=2\sqrt{1-x}-2x\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x} \Leftrightarrow 2y^3+y=2(1-x)\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t,$ ta có $f'(t)=6t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy

$(1)\Leftrightarrow f(y)=f(\sqrt{1-x})\Leftrightarrow y=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ y^2=1-x \end{cases}$

Thế vào (2) ta được $\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}=4+\sqrt{x+4}$ (3). Xét hàm số

$g(x)=\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{x+4},$ liên tục trên [-4;1], ta có

$g'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{3-2x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}<0\ \forall x\in(-4;1)\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên [-4;1]. Lại có $g(-3)=4$ nên $x=-3$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3).

Với $x=-3$ suy ra $y=2.$ Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=-3 \\ y=2. \end{cases}$

Bài 97 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1)=3x^2-4x+1(1) \\ xy+x+1=x^2 \qquad (2) \end{cases}$

Giải

Nhận xét x = 0 không thỏa mãn phương trình (2) nên ta có thể suy ra $y+1=\dfrac{x^2-1}{x}$ (3)

Thay (3) vào (1) ta được

$$x^2\cdot\frac{x^2-1}{x}(x+\frac{x^2-1}{x})=3x^2-4x+1\Leftrightarrow(x-1)(x+1)(2x^2-1)=(x-1)(3x-1)$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(2x^3+2x^2-4x)=0\Leftrightarrow 2x(x-1)^2(x+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Loại nghiệm x = 0, vậy phương trình có hai nghiệm: $(1;\ -1)$,$\left(-2;\ -\frac{5}{2}\right)$.

Bài 98 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases}$

Giải

Ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2(y - x^2) + y^3 - (x^2)^3 = 0 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - x^2)(2x^2 + y^2 + yx^2 + x^4) = 0 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases}$

Trường hợp 1: y =x^2, thay vào (2) :

$(x+2)\sqrt{x^2+1} = (x^2 + 1 + 2x) \Leftrightarrow t^2 - (x+2)t + 2x = 0 \Rightarrow t = 2; t = x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+1} = 2 \Rightarrow x^2 = 3 \leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ \sqrt{x^2+1} = x \Rightarrow x \in \varnothing \end{array}\right. .$$

Trường hợp 2: $2x^2 + y^2 + yx^2 + x^4 = 0 \Leftrightarrow y^2 + \text{yx}^2 + (2x^2 + x^4) = 0$

$\Rightarrow \Delta_y = x^4 - 4(2x^2 + x^4) = -3x^4 - 8x^2 < 0 \vee x \in R \rightarrow \Delta_y < 0$

$\Rightarrow f(,y) = 2x^2 + y^2 + yx^2 + x^4 > 0 \vee x, y$. Phương trình vô nghiệm .

Do đó hệ có hai nghiệm : (x;y)=$(-\sqrt{3};3),(\sqrt{3};3)$

Chú ý: *Ta còn có cách giải khác*

Phương trình (1) khi x = 0 và y = 0 không là nghiệm do không thỏa mãn (2).

Chia 2 vế phương trình (1) cho $x^3 \neq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 2x + x^3$

Xét hàm số : $f(t) = 2t + t^3 \Rightarrow f'(t) = 2 + 3t^2 > 0 \forall t \in R$. Chứng tỏ hàm số f(t) đồng biến . Để phương trình có nghiệm thì chỉ xảy ra khi : $\frac{y}{x} = x \Leftrightarrow y = x^2$. Đến đây ta giải như ở phần trên.

Bài 99 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) = 1 \\ x\sqrt{6x - 2xy + 1} = 4xy + 6x + 1 \end{cases}$

Giải

Ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \left(-y + \sqrt{1 + (-y)^2}\right) \\ x\sqrt{6x - 2xy + 1} = 4xy + 6x + 1 \end{cases}$. (nhân liên hợp)

Xét hàm số : $f(t) = t + \sqrt{1+t^2} \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{\sqrt{1+t^2} + t}{\sqrt{t^2+1}} > \frac{|t| + t}{\sqrt{1+t^2}} \geq 0 \forall t \in R$

Chứng tỏ hàm số đồng biến . Để $f(x) = f(-y)$ chỉ xảy ra $x = -y$ (*)

Thay vào phương trình (2) :

$$x\sqrt{6x+2x^2+1}=-4x^2+6x+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2+6x+1}-\frac{x}{2}\right)^2=\frac{\ }{4}x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+6x+1}=3x\\ \sqrt{2x^2+6x+1}=-2x\end{array}\right.$$

❖ Trường hợp : $\sqrt{2x^2+6x+1}=3x \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ 2x^2+6x+1=9x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ 7x^2-6x-1=0\end{cases} \Rightarrow x=1;y=-1$

❖ Trường hợp : $\sqrt{2x^2+6x+1}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ 2x^2+6x+1=4x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ 2x^2-6x-1=0\end{cases}$

$\Rightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2};y=\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}$. Vậy hệ có hai nghiệm : (x; y) = (1;-1),($\dfrac{3-\sqrt{11}}{2};\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}$)

<u>Bài 100</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(8x-3)\sqrt{2x-1}-y-4y^3=0 & (1)\\ 4x^2-8x+2y^3+y^2-2y+3=0 & (2)\end{cases}$

<u>Giải</u>

Điều kiện : $x\ge \dfrac{1}{2}$.

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow (8x-3)\sqrt{2x-1}=y+4y^3\ (*)$

Đặt $t=\sqrt{2x-1}\Rightarrow 2x=t^2+1 \Leftrightarrow (8x-3)\sqrt{2x-1}=\left[4\left(t^2+1\right)-3\right]t=\left(4t^2+1\right)t=4t^3+t$

Do đó (*) : $4t^3+t=4y^3+y$

Xét hàm số : f(u) = $4u^3+u \Rightarrow f'(u)=12u^2+1>0\forall u\in R$. Chứng tỏ hàm số đồng biến . Do đó phương trình có nghiệm khi : f(t) = f(y) $\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=y \Leftrightarrow 2x=y^2+1(**)$

Thay vào (2) : $\left(y^2+1\right)^2-4\left(y^2+1\right)+2y^3+y^2-2y+3=0 \Leftrightarrow y^4+2y^3-y^2-2y=0$

$\Leftrightarrow y\left(y^3+2y^2-y-2\right)=0 \Leftrightarrow y(y-1)\left(y^2+3y+2\right)=0 \Leftrightarrow y(y-1)(y+2)(y+1)=0$

Vậy : $\begin{cases}y=0\\ 2x=y^2+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\ x=\dfrac{1}{2}\end{cases} \to (x;y)=\left(\dfrac{1}{2};0\right), \begin{cases}y=0\\ 2x=y^2+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\ x=1\end{cases} \to (x;y)=(1;1)$

$\begin{cases}y=-1\\ 2x=y^2+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\ x=1\end{cases} \to (x;y)=(1;0), \begin{cases}y=-2\\ 2x=y^2+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2\\ x=\dfrac{5}{2}\end{cases} \to (x;y)=\left(\dfrac{5}{2};-2\right).$

<u>Hết</u>

Đồng Xoài, ngày 05 tháng 8 năm 2014

Chúc quý thầy cô và các em học sinh có một tài liệu bổ ích.

